VISIT…

*Ю. П. Желтов*

# МЕХАНИКА НЕФТЕГАЗОНОСНОГО ПЛАСТА

МОСКВА «НЕДРА» 1975

УДК 622.276

**Желтов Ю. П.** Механика нефтегазоносного пласта. М., «Недра», 1975, 216 с.

В книге дано систематическое изложение основ теории механических явлений, связанных с разработкой нефтяных и газовых пластов. Для описания этих явлений используются представления и методы механики сплошных сред, термодинамики и других областей науки. В рассмотрение включены вопросы фильтрации, деформации горных пород, подземной термогидродинамики.

Кратко освещены новые процессы, возникающие в нефтяных пластах при осуществлении с целью увеличения нефтеотдачи внутрипластовых окислительных реакций в сочетании с заводнением.

Книга предназначена для студентов старших курсов нефтяных вузов, инженерно-технических работников, аспирантов и начинающих научных работников.

Табл. 2, ил. 107, список лит. 152 назв.

Ж $\frac{30802-037}{043(01)-75}$ 248—75

© Издательство «Недра», 1975

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Стремительный рост нефтяной и газовой промышленности в нашей стране связан не только с появлением новых районов добычи нефти и газа, но и с открытием новых типов месторождений, дальнейшим совершенствованием и расширением искусственного воздействия на пласты.

Поэтому развитие добычи нефти и газа ставит перед наукой о нефтяных и газовых пластах новые задачи.

Ввод в действие крупных нефтяных и газовых месторождений в Западной Сибири, на севере Европейской части СССР, в Туркмении и Казахстане требует создания эффективных методов разработки месторождений, содержащих одновременно нефть, газ и легкие углеводороды (конденсат) или высокопарафинистые и высоковязкие нефти.

Широкое распространение заводнения нефтяных пластов, увеличение давления нагнетания воды в пласты, открытие залежей нефти и газа на больших глубинах приводят к необходимости дальнейшего изучения явлений деформации пород-коллекторов.

Открытие и разработка месторождений с трещиноватыми коллекторами требуют учета особых свойств этих коллекторов.

В настоящее время большое внимание уделяется проблеме увеличения нефтеотдачи пластов. Пути решения этой проблемы состоят в использовании для извлечения нефти из недр более эффективных вытеснителей, нежели широко применяемая вода, в улучшении вымывающих свойств воды, а также в осуществлении в пластах тех процессов, которые обусловлены вводом тепла в пласт или генерированием его в самом пласте.

Расширение круга вопросов, с которыми приходится иметь дело инженерно-техническим работникам и ученым нефтяной и газовой промышленности, приводит к необходимости усвоения ими знаний в тех областях механики, физико-химии, термодинамики, химии и т. д., которые раньше использовались нефтяниками и газовиками лишь в редких случаях.

На протяжении многих лет теоретическую основу науки о нефтяных и газовых пластах составляла подземная гидрогазодинамика. Хорошо известно, что эта область знаний оказала огромное влияние на развитие современных методов разработки нефтяных и газовых месторождений. Сегодня становится все более очевидным, что для

познания нефтяных и газовых пластов и тех процессов, которые будут осуществляться при их разработке, требуется привлечение новых областей знания. В свою очередь и подземная гидрогазодинамика должна существенно измениться в результате включения в нее новых вопросов.

В предлагаемой читателю книге автор сделал попытку дать краткое систематическое изложение разделов науки о нефтяных и газовых пластах, включающих подземное движение жидкостей и газов, деформацию пород, термогидродинамические явления. Все эти разделы в той или иной степени связаны с механическими явлениями, происходящими в пластах. Поэтому книга и получила название «Механика нефтегазоносного пласта».

Наука о нефтяных и газовых пластах опирается на достижения фундаментальных наук. Представления механики сплошных сред и математической физики используются во всех разделах книги. Кроме того, изложению ряда основных из этих представлений посвящена отдельная глава.

В этой сравнительно небольшой по объему книге нельзя дать полное освещение всех решенных к настоящему времени задач в области подземной гидрогазодинамики, деформации и разрушения горных пород, термогидродинамики пласта. К тому же часто эти задачи представляют бóльший интерес не с точки зрения механики, а с точки зрения прикладной и вычислительной математики или конкретных практических приложений.

Замысел автора состоял в том, чтобы в форме, доступной широкому кругу инженеров и начинающих научных работников, осветить механизм и дать основы математического описания рассматриваемых явлений и процессов. Поэтому в книге излагаются сравнительно простые, а иногда упрощенные примеры, в основном не требующие использования специальных математических методов и сложного численного счета.

Автор глубоко признателен Г. И. Баренблатту, прочитавшему эту книгу в рукописи и высказавшему автору весьма важные пожелания.

При написании книги автор использовал материалы, любезно предоставленные ему В. М. Ентовым, А. В. Савинихиной и Г. Ф. Требиным. Большую помощь в программировании и осуществлении численного счета оказала автору В. М. Говердовская. Всем им автор выражает глубокую благодарность.

## ГЛАВА I

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

### § 1. ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Явления, наблюдаемые в природе или возникающие в результате деятельности человека, можно характеризовать количественно параметрами, определяющими их масштаб, координаты, время, скорость и т. д. Совокупность этих параметров отражает условия, в которых протекает данное явление. Основная задача научного исследования состоит в создании теории, подтвержденной экспериментальными фактами, позволяющей не только сравнивать явления, происходящие при различных параметрах, но и предсказывать их протекание в новых условиях.

Однако допустим, что теории данного явления пока нет и исследователь решил его моделировать в лабораторных условиях. Главные вопросы, которые возникнут у исследователя, будут состоять в том, как ему построить экспериментальную установку и как проводить опыты с тем, чтобы их результаты можно было применять к реальным натурным условиям. Можно, конечно, создать экспериментальную установку с полным соблюдением натурных условий. Однако это не всегда возможно, например, когда создание экспериментальной установки является слишком трудоемким.

Таким образом, исследователь приходит к необходимости создавать установку меньших, чем в натуре, размеров. Но для обеспечения подобия явлений в модели и натуре далеко не всегда бывает достаточным соблюсти только геометрическое подобие. Предположим, что экспериментатор, не знакомый с теорией подобия, решил моделировать процесс движения воды в закрытом канале прямоугольного поперечного сечения (рис. 1). При этом ему требуется в качестве основной задачи определить, каков будет расход воды $q$, если заданы длина канала $L$, его высота $w$ и ширина $b$, причем $b \gg w$, уровень воды в канале $h$. Пусть экспериментатор построил установку, все геометрические размеры которой в 10 раз меньше геометрических размеров канала в натуре. Во сколько же раз на экспериментальной установке уменьшится расход воды? Для ответа на этот вопрос экспериментатору, если он не пользуется методами

подобия или гидродинамической теорией, нужно построить целый ряд установок, отличающихся одна от другой своими параметрами. Допустим, что экспериментатор нашел в результате длительных опытов, что расход воды в канале определяется следующей зависимостью:

$$q = \frac{w^3 b \rho g h}{12 \mu L}, \qquad (1.1)$$

где $\mu$ — вязкость воды; $\rho$ — плотность воды; $g$ — ускорение свободного падения. Только тогда он узнает, что при уменьшении геометрических размеров модели в 10 раз, при сохранении в модели и в натуре величины $h/L$, расход воды в эксперименте уменьшается в $10^4$ раз по сравнению с натурой. При этом экспериментатора подстерегает также и другая неожиданность. Он или другие

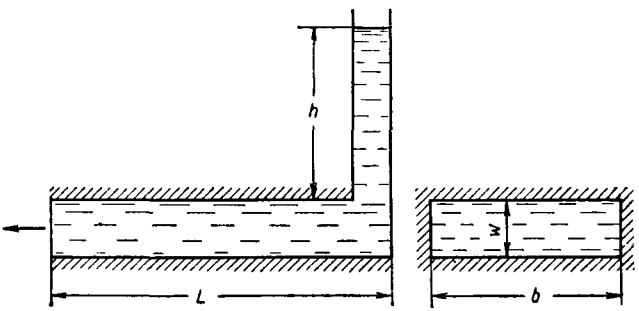



Рис. 1. Канал прямоугольного сечения

экспериментаторы найдут, как это и было на самом деле, что, например, при увеличении расхода воды экспериментальные данные «не укладываются» в зависимость (1.1). То же самое получается при больших $w$. Обнаруживается также, что в одних случаях течение воды в канале является спокойным, ламинарным, а в других сопровождается пульсациями скорости, т. е. является турбулентным.

Описанная выше картина движения была получена при изучении течения вязкой жидкости в трубе. Если экспериментально определять, скажем, перепад давления на некотором участке трубы, то при движении одной и той же жидкости на одном и том же участке той же самой трубы можно получать различные зависимости перепада давления от скорости. Так, при одних условиях будет существовать линейная связь между перепадом давления и средней скоростью (расходом) вязкой жидкости, при других же условиях эта связь будет иметь иной характер. При этом сам механизм движения также существенно изменяется — ламинарное движение становится турбулентным. Если изменять не только среднюю скорость движения, но и размер трубы и свойства жидкости, можно получать огромное число различных зависимостей перепада давления от того или иного параметра. Как же сопоставлять результаты этих опытов? В каких

случаях можно с уверенностью говорить, что опыты проводятся в сопоставимых условиях? Ответ на этот вопрос дают методы подобия, о которых и пойдет речь ниже.

Обратимся снова к примеру, приведенному в начале параграфа. Перепишем зависимость (1.1) в следующем виде:

$$\lambda = \frac{2gh}{v^2 L} = f(N), \quad v = \frac{q}{wb}, \quad N = \frac{vw\rho}{\mu} \tag{1.2}$$

Входящие в (1.2) величины $\lambda$ и $N$ — безразмерные, т. е. представляют собой просто числа. Таким образом, оказывается, что зависимость (1.2), описывающая процесс течения воды в закрытом канале, представляется в виде объективно существующей связи между числами $\lambda$ и $N$, так что некоторому числу $N$ соответствует вполне определенное число $\lambda$. Одно и то же число $N$ может соответствовать опытам при различных значениях $v$, $h/L$, $w$, $b$, $\mu$, $\rho$. Однако изменение этих параметров при условии $N = \text{const}$ не будет приводить к изменению $\lambda$. Таким образом, об опытах при одном и том же $N$ можно говорить, что они проходят в сопоставимых условиях. Приведенный выше параметр $N$, как известно, называется числом Рейнольдса $N_{\text{Re}}$.

То же самое можно сказать и о процессе движения вязкой жидкости в круглой трубе, имеющей длину $L$ и диаметр $d$. В этом случае гидравлическое сопротивление также характеризует безразмерная величина $\lambda = \frac{2d\Delta p}{Lv^2\rho}$ ($\Delta p$ — перепад давления в трубе), зависящая от безразмерного параметра $N_{\text{Re}} = vd\rho/\mu$. Таким образом,

$$\lambda = \lambda(N_{\text{Re}}). \tag{1.3}$$

И в опытах по изучению движения вязкой жидкости в трубе можно изменять скорость, вязкость и плотность жидкости, а также диаметр трубы. Однако, если при этом $N_{\text{Re}}$ остается неизменным, можно считать, что эти опыты ведутся в сопоставимых (подобных) условиях или что обеспечено подобие опытов.

Обработка экспериментальных данных по движению жидкостей в трубах показала, что эти данные «укладываются» в зависимости (1.3).

Если при изучении любого явления удается построить зависимость характеристик этого явления от параметров, определяющих явление, в безразмерной форме, то для обеспечения подобия опытов, воспроизводящих изучаемое явление, необходимо выдержать постоянство в этих опытах безразмерных параметров, входящих в данную зависимость, называемых параметрами или критериями подобия. В этом и состоит основное требование теории подобия и моделирования.

Здесь нужно сказать о приближенном подобии. Если, например, известно, что в определенном диапазоне изменения безразмерного параметра изучаемая характеристика слабо от него зависит, то для подобия явлений не требуется в точности соблюдать равенство

безразмерных параметров в сравниваемых случаях. Достаточно, чтобы они укладывались в отрезке, соответствующем слабой зависимости изучаемой характеристики от безразмерного параметра. Таким образом, будет обеспечено приближенное подобие явлений.

Как же получить зависимость изучаемой характеристики явления от определяющих параметров в безразмерной форме? Для этого можно использовать два пути. Первый из них применяется в том случае, когда изучаемое явление настолько ново или сложно, что отсутствует его математическая модель.

Этот путь следующий. После того как исследователь опытным путем или даже на основе своей интуиции установит параметры, от которых зависит изучаемая характеристика явления (определяющие параметры), необходимо выяснить, какие из определяющих параметров имеют независимую размерность, т. е. не могут быть выражены друг через друга. Это можно сделать либо путем простого сопоставления размерностей параметров, либо используя следующий способ. Пусть нужно определить зависимость или независимость размерностей таких параметров, как длина $l$, скорость $v$, и вязкость $\mu$. Они имеют следующую размерность:

$$[l]=L,\ [v]=LT^{-1},\ [\mu]=PL^{-2}T, \tag{1.4}$$

где $L$, $T$ и $P$ — соответственно размерности длины, времени и силы. Квадратные скобки означают размерность соответствующей величины.

Определим теперь, можно ли одну из величин, например $l$, выразить через $v$ и $\mu$. Имеем

$$[l]=L=[v]^x[\mu]^y=L^xT^{-x}P^yL^{-2y}T^y=L^{x-2y}P^yT^{y-x}. \tag{1.5}$$

Приравнивая размерности в левой и правой частях равенства (1.5), получаем систему уравнений:

$$x-2y=1;\quad y=0;\quad y-x=0. \tag{1.6}$$

Как можно легко видеть, система (1.6) является несовместной. В самом деле, из второго и третьего уравнений получается, что $x = y = 0$, что не соответствует результату, получаемому из первого и второго уравнений. Таким образом, параметры $l$, $v$ и $\mu$ имеют независимую размерность.

Если же теперь, например, к указанным выше параметрам $l$, $v$ и $\mu$ добавить еще и давление $[p] = PL^{-2}$, то этот параметр можно выразить через остальные. Так,

$$p=\frac{v\mu}{l}. \tag{1.7}$$

Следовательно, о всех четырех параметрах $l$, $v$, $\mu$ и $p$ уже нельзя сказать, что они имеют независимую размерность. Ею будут обладать лишь три параметра: $l$, $v$ и $\mu$.

Итак, допустим в общем случае, что исследуемая характеристика явления $a$ есть функция $n$ определяющих параметров $a_i$, т. е. что

$$a = f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n). \tag{1.8}$$

При этом $k$ параметров из $n$ обладают независимой размерностью, причем

$$[a_1] = A_1, \quad [a_2] = A_2, \quad \ldots, \quad [a_k] = A_k. \tag{1.9}$$

В выражении (1.9) символы $A_1$, $A_2$ и т. д. означают размерность соответствующих параметров $a_1$, $a_2$ и т. д. Размерность же остальных величин, входящих в зависимость (1.8), обозначим следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} [a] &= A_1^{m_1} A_2^{m_2} \ldots A_k^{m_k}; \\ [a_{k+1}] &= A_1^{p_1} A_2^{p_2} \ldots A_k^{p_k}; \\ [a_n] &= A_1^{q_1} A_2^{q_2} \ldots A_k^{q_k}, \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

где $m_i$, $p_i$, $q_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ являются показателями степени при соответствующих размерностях.

В теории подобия существует П-теорема («пи-теорема»), которая гласит [102], что всякая зависимость вида (1.8) исследуемой характеристики явления от определяющих явление параметров может быть представлена в безразмерном виде:

$$\Pi = \Pi(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}), \tag{1.11}$$

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k}};$$

$$\Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_k^{p_k}};$$

$$\Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_k^{q_k}}.$$

В качестве примера применения П-теоремы подобия рассмотрим процесс вытеснения нефти водой из прямолинейного образца пористой среды. В этом процессе в образец, пористая среда которого первоначально была насыщена нефтью, закачивается вода, вытесняющая нефть. При этом в области $0 \leqslant x \leqslant l$ (рис. 2) существует совместное течение нефти и воды, а также действуют капиллярные силы. В области $l \leqslant x \leqslant L$ движется чистая нефть.

Предположим, что в этом процессе исследователь намерен определять перепад давления в области, куда проникла вода, вытесняющая нефть. Будем считать, что перепад давления $\Delta p$, отнесенный к длине $l$, зависит от расхода воды $v$, отнесенного к единице площади образца, параметра $k$, характеризующего свойства пористой среды пропускать жидкость (проницаемости пористой среды), вяз-

кости воды $\mu_1$, вязкости нефти $\mu_2$, поверхностного натяжения $\sigma$ и угла смачивания $\theta$. Следовательно,

$$\frac{\Delta p}{l} = f(v,\ k,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \sigma,\ \theta). \tag{1.12}$$

Входящие в (1.12) параметры имеют следующую размерность:

$$\left[\frac{\Delta p}{l}\right] = PL^{-3};\quad [v] = LT^{-1};\quad [k] = L^2;$$

$$[\mu] = PL^{-2}T;\quad [\sigma] = PL^{-1}, \tag{1.13}$$

а $\theta$ — безразмерная величина.

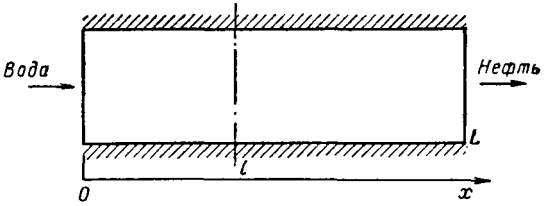



Рис. 2. Вытеснение нефти водой из пласта

Начиная анализ размерностей параметров (1.12), можно увидеть, что параметры $v$, $k$ и $\mu_1$ имеют независимую размерность, т. е., например, $v$ никак нельзя выразить через $k$ и $\mu_1$, поскольку в размерность $\mu_1$ входит размерность силы, которая не входит ни в $v$, ни в $k$. Поверхностное натяжение $\sigma$ имеет размерность, зависимую от параметров $v$ и $\mu_1$, так как $[\sigma] = [v\mu_1]$. Угол смачивания $\theta$, как величину безразмерную, не будем включать в анализ размерности, отнеся его заранее в число безразмерных параметров.

В таком случае, используя обозначения, данные в формулах (1.10) и (1.11), имеем

$$a_1 = v,\quad a_2 = k,\quad a_3 = \mu_1,\quad a_{k+1} = \mu_2,$$

$$a_n = \sigma,\quad A_1 = LT^{-1},\quad A_2 = L^2,$$

$$A_3 = PL^{-2}T. \tag{1.14}$$

Отсюда

$$\left[\frac{\Delta p}{l}\right] = PL^{-3} = L^{m_1}T^{-m_1}L^{2m_2}P^{m_3}L^{-2m_3}T^{m_3} =$$

$$= L^{m_1+2m_2-2m_3}P^{m_3}T^{m_3-m_1}. \tag{1.15}$$

Приравнивая размерности в левой и правой частях равенства (1.15), получаем

$$m_1 = m_3 = 1,\quad m_2 = -1. \tag{1.16}$$

Аналогично имеем

$$p_1 = p_2 = 0,\quad p_3 = 1,\quad q_1 = q_3 = 1,\quad q_2 = 0. \tag{1.17}$$

Теперь уже можно использовать непосредственно П-теорему подобия. Имеем

$$\Pi = \frac{\Delta p}{lvk^{-1}\mu_1}, \quad \Pi_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \Pi_{n-k} = \frac{\sigma}{v\mu_1}. \tag{1.18}$$

Окончательно получаем

$$\Pi = \Pi\left(\frac{\sigma}{v\mu_1}, \ \frac{\mu_2}{\mu_1}, \ \theta\right) \tag{1.19}$$

Другой путь получения безразмерных параметров подобия используется в тех случаях, когда имеется математическая формулировка изучаемого явления — есть математическая модель и формулировка начальных и граничных условий. После приведения уравнений, описывающих явление, а также начальных и граничных условий к безразмерной форме получится, что в математическую формулировку входят безразмерные параметры. Если рассматривать процессы, протекающие в двух различных случаях, характеризующихся разными условиями, но так, что безразмерные параметры, входящие в уравнения, начальные и граничные условия, приведённые к безразмерной форме, остаются одними и теми же, то математическое описание процессов в двух указанных случаях будет в точности одним и тем же и, следовательно, процессы будут подобными.

Конечно, математическая формулировка явления обычно оказывается возможной при его достаточно глубокой изученности.

Использование методов подобия весьма плодотворно не только при экспериментальном исследовании явлений, но и при получении математических решений задач. Применение методов подобия в задачах механики подробно изложено в известной книге Л. И. Седова [102].

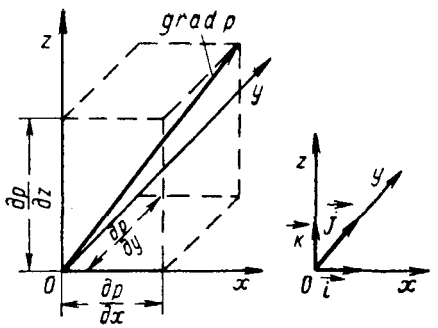
## § 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ, ТЕОРИИ ПОЛЯ И ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Чтобы облегчить чтение книги, в этом параграфе кратко излагаются основы векторного и тензорного исчисления, а также теории поля.

Векторами называются величины, имеющие как размеры, так и направление в пространстве. Классическими примерами векторных величин являются сила, скорость и ускорение. Давление же и температура являются примерами скалярных величин, не имеющих направления. Скалярные величины можно изображать в виде чисел. Векторные же величины изображаются отрезками, имеющими направление в пространстве.

Длина вектора $\vec{a}$ называется модулем вектора и обозначается символом $a$ или $|a|$. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считаются равными только в том случае, когда равны длины векторов (модули) и совпадают их направления. Сложение и вычитание векторов производятся по правилам параллелограмма или параллелепипеда.

Пусть в каждой точке пространства существует некоторая скалярная величина, например давление $p$. Тогда говорят, что имеется скалярное поле — поле давления. Возьмем некоторую точку 0, находящуюся в начале декартовых координат $x$, $y$, $z$ (рис. 3, *а*). Скалярная величина $p$ изменяется с изменением координат, так что „скорость" изменения $p$ в направлении оси $0x$ будет равна производной от $p = p(x, y, z)$ по координате $x$, т. е. $dp/dx$. Соответственно в направлениях $y$ и $z$ будем иметь производные $dp/dy$ и $dp/dz$. Единичные векторы, т. е. векторы, модули которых равны единице, направленные по осям $x$, $y$ и $z$ (рис. 3, *б*), обозначаются $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Таким образом, если принять, что в направлениях $x$, $y$ и $z$ имеются векторы, модули которых равны $dp/dx$, $dp/dy$ и $dp/dz$, то сами векторы можно обозначить соответственно $(dp/dx)\vec{i}$, $(dp/dy)\vec{j}$ и $(dp/dz)\vec{k}$.




*а* *б*

Рис. 3. Градиент и его проекции на оси $x$, $y$, $z$

Одной из основных характеристик поля является градиент, сокращенно обозначаемый символом grad, для которого имеем следующее выражение:

$$\operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}. \tag{2.1}$$

Градиент, как видно из (2.1), равен сумме векторов, направленных по осям координат, и сам является векторной величиной. Его направление для данного поля строго определенное.

Производная скалярной величины по любому направлению $n$, не совпадающему с направлением градиента, выражается следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial p}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial p}{\partial z}\cos\gamma,$$

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial n}. \tag{2.2}$$

Если принять, что в направлении $n$ имеется единичный вектор, проекции которого на соответствующие оси координат выражаются как

$$n_x = \cos\alpha, \quad n_y = \cos\beta, \quad n_z = \cos\gamma, \tag{2.3}$$

то на основе (2.2) и (2.3) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \operatorname{grad} p \cdot \vec{n}. \tag{2.4}$$

В правой части формулы (2.4) представлено скалярное произведение двух векторов grad $p$ и $\vec{n}$. Скалярное произведение векторов, как известно, равно произведению модулей векторов на косинус угла между ними. Таким образом, производная скалярной величины $p$ по направлению $n$ является скалярной величиной. Чтобы несколько более подробно пояснить формулу (2.4), представим ее в развернутом виде:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}) =$$

$$= \frac{\partial p}{\partial x} n_x \cos(\vec{i}, \vec{i}) + \frac{\partial p}{\partial y} n_x \cos(\vec{j}, \vec{i}) + \frac{\partial p}{\partial z} n_x \cos(\vec{k}, \vec{i}) +$$

$$+ \frac{\partial p}{\partial x} n_y \cos(\vec{i}, \vec{j}) + \frac{\partial p}{\partial y} n_y \cos(\vec{j}, \vec{i}) + \frac{\partial p}{\partial z} n_y \cos(\vec{k}, \vec{j}) +$$

$$+ \frac{\partial p}{\partial x} n_z \cos(\vec{i}, \vec{k}) + \frac{\partial p}{\partial y} n_z \cos(\vec{j}, \vec{k}) + \frac{\partial p}{\partial z} n_z \cos(\vec{k}, \vec{k}). \qquad (2.5)$$

В выражениях (2.5) имеются в виду косинусы углов между соответствующими направлениями $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Поскольку косинусы углов между совпадающими линиями равны единице, а между взаимно перпендикулярными — нулю, то в правой части выражения (2.5) остаются только три члена, т. е. получаем

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y + \frac{\partial p}{\partial z} n_z. \qquad (2.6)$$

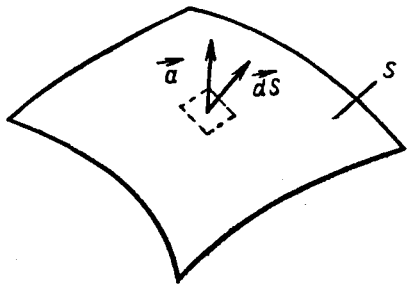


Рис. 4. Элемент поверхности $dS$

Если подставить в выражение (2.6) выражения из (2.3), то и получим формулу (2.2).

Рассмотрим теперь векторное поле, когда в какой-то точке пространства $M(x, y, z)$ имеется вектор $\vec{a}(M)$. В другой точке пространства $M_1$ величина вектора будет иная, чем в точке $M$, так что в точке $M_1$, например, будем иметь вектор $\vec{a}_1(M_1)$. Если взять некоторую произвольную поверхность $S$ в векторном поле (рис. 4), то к каждому малому элементу этой поверхности будет относиться вектор $\vec{a}$. В общем случае направления $n$ нормали к элементу поверхности $dS$ и вектора $\vec{a}$, конечно, не будут совпадать. Элементарным потоком вектора $df$ через поверхность $dS$ называется скалярная величина

$$df = |a| \cos(n, a)\, dS. \qquad (2.7)$$

Можно перпендикулярно к элементарной площадке $dS$ направить вектор $\vec{dS}$, модуль которого равен величине площади $dS$. Тогда

на основе (2.7) $df$ будет равен скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{dS}$, т. е.

$$df = \vec{a} \cdot \vec{dS}. \tag{2.8}$$

Полный поток вектора $\vec{a}$ через поверхность $S$ равен сумме элементарных потоков или, в пределе, интегралу

$$F = \int\int_S \vec{a} \cdot \vec{dS}. \tag{2.9}$$

Поток вектора, определенный фомулой (2.9), является скалярным потоком. Пусть теперь имеем некоторый объем $V$ в векторном поле, ограниченный замкнутой поверхностью $S$. Составим отношение полного потока $F$, определяемого формулой (2.9), к объему $V$. При стремлении объема $V$ к нулю уменьшается и поток вектора $F$ через поверхность $S$. Однако отношение $F/V$ даже при $V \to 0$ может оказаться величиной, отличной от нуля. Это отношение называется дивергенцией (расхождением) векторного поля $\vec{a}(M)$ и обозначается как $\operatorname{div} a$. По определению,

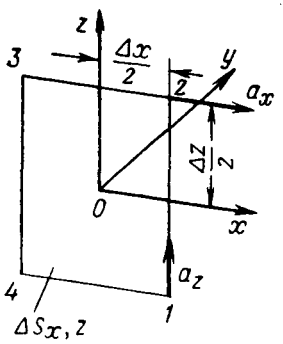



Рис. 5. Элементарная площадка $\Delta S_{x,z}$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim \frac{F}{V} \quad V \to 0. \tag{2.10}$$

В теории поля доказывается, что

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{2.11}$$

где $a_x$, $a_y$ и $a_z$ — проекции вектора $\vec{a}$ на оси $x$, $y$ и $z$.

Как видно, дивергенция векторного поля — величина скалярная. Пусть имеем векторное поле градиента некоторой скалярной величины, например опять давления $p$. Дифференциальный оператор, соответствующий дивергенции векторного поля градиента, называется лапласианом и обозначается обычно символом $\Delta$ (дельта). Для приведенного выше примера градиента давления $p$ имеем

$$\Delta p = \operatorname{div} \operatorname{grad} p. \tag{2.12}$$

Иногда для дифференциальных операторов grad и div используют символ $\nabla$ (набла). Тогда оператор $\nabla$, называемый гамильтонианом, от скалярной величины $p$ будет означать градиент давления $\nabla p = \operatorname{grad} p$, а от векторной величины — дивергенцию. Двукратное

применение оператора $\nabla$ сначала к скалярной, а затем к векторной величине равнозначно применению оператора $\Delta$, т. е. $\Delta p = \nabla^2 p$.

Циркуляцией $\Gamma$ вектора $\vec{a}$ вдоль некоторой линии $l$ называется криволинейный интеграл

$$\Gamma = \int_l \vec{a}\, dl. \tag{2.13}$$

Пусть в некоторой точке *0* поля вектора $\vec{a}$ (рис. 5) имеем элементарную площадку $\Delta S_{x,z} = \Delta x \Delta z$, перпендикулярную к плоскости $x$, $y$. Примем для простоты, что в точке *1* проекция вектора $a$ на ось $z$ равна $a_z$, а в точке *2* его проекция на ось $x$ равна $a_x$. Вычислим теперь циркуляцию вектора $a$ по границе элементарной площадки $\Delta S_{x,z}$. При вычислении циркуляции по линии *1—2* будет иметь значение только проекция $a_z$, так что остальные проекции не учитываем. При вычислении же циркуляции по линии *2—3* нужно учитывать только $a_x$. Вычисляя циркуляцию $\Delta\Gamma a_{x,z}$ вектора $a$ по элементарному контуру *1—2—3—4*, получаем, пренебрегая величинами более высокого порядка малости,

$$\Delta\Gamma a_{x,z} = \left(a_z + \frac{1}{2}\frac{\partial a_z}{\partial z}\Delta z\right)\Delta z - \left(a_x + \frac{1}{2}\frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta x -$$
$$- \left[\left(a_z + \frac{1}{2}\frac{\partial a_z}{\partial z}\Delta z\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial a_z}{\partial x}\Delta x\right]\Delta z + \left[\left(a_x + \frac{1}{2}\frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta x\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial a_x}{\partial z}\Delta z\right]\Delta x = \frac{1}{2}\frac{\partial a_x}{\partial z}\Delta x \Delta z - \frac{1}{2}\frac{\partial a_z}{\partial x}\Delta x \Delta z. \tag{2.14}$$

Вычислим теперь отношение циркуляции вектора $\vec{a}$ по элементарному контуру $\Delta\Gamma a_{x,z}$ к площади $\Delta S_{x,z} = \Delta x \Delta z$. Имеем при $\Delta S_{x,z} \to 0$

$$\frac{2\Delta\Gamma a_{x,z}}{\Delta S_{x,z}} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}. \tag{2.15}$$

Величина (2.15) является проекцией на ось $y$ векторной величины, называемой вихрем вектора $\vec{a}$ (векторного поля $\vec{a}$) и обозначаемой $\operatorname{rot}\vec{a}$. Таким образом, для проекции на ось $y$ вихря вектора $\vec{a}$ имеем выражение

$$\operatorname{rot}_y \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}. \tag{2.16}$$

Проекции вихря вектора $a$ на другие оси координат выражаются следующим образом:

$$\operatorname{rot}_x \vec{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z};$$
$$\operatorname{rot}_z \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}, \tag{2.17}$$

Для самого вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$ имеем выражение

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{2.18}$$

Из выражений (2.11) и (2.18) следует, что дивергенция вихря любого векторного поля равна нулю.

Ниже приводятся важнейшие интегральные соотношения теории поля. Согласно теореме Остроградского, поток вектора $\vec{a}$ через замкнутую поверхность $\sum$ равен интегралу от дивергенции вектора $\vec{a}$ по объему $V$, заключенному внутри $\sum$, т. е.

$$\iint_{\Sigma} \vec{a} \bigcirc d\vec{\Sigma} = \iiint_{V} \operatorname{div} \vec{a}\, dV. \tag{2.19}$$

По теореме Стокса циркуляция вектора $\vec{a}$ по некоторой замкнутой кривой $L$ равна потоку вихря вектора $\vec{a}$ через любую поверхность $S$, ограниченную кривой $L$. Следовательно,

$$\int_{L} \vec{a} \bigcirc d\vec{L} = \iint_{S} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S}. \tag{2.20}$$

В формулах (2.19) и (2.20) имеются в виду скалярные произведения соответствующих векторов на элементарные векторы $d\vec{\Sigma}$, $d\vec{L}$ и $d\vec{S}$. Если имеется такое поле вектора $\vec{a}$, что $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$, то подынтегральное выражение в формуле (2.20) равно нулю и равна нулю вся правая, а также левая часть (2.20), т. е. циркуляция вектора $\vec{a}$ по замкнутой кривой $L$ равна нулю. Такое поле называется потенциальным или безвихревым. Рассмотрим теперь снова векторное поле $\vec{a}(M)$ и вычислим производную векторного поля в точке $M$ по некоторому направлению $n$ в пространстве. Имеем

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial n} = \frac{\partial a_x}{\partial n}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial n}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial n}\vec{k}. \tag{2.21}$$

В свою очередь производные проекции вектора $a$ на оси координат определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial a_x}{\partial n} &= \frac{\partial a_x}{\partial x}\cos(x, n) + \frac{\partial a_x}{\partial y}\cos(y, n) + \frac{\partial a_x}{\partial z}\cos(z, n);\\
\frac{\partial a_y}{\partial n} &= \frac{\partial a_y}{\partial x}\cos(x, n) + \frac{\partial a_y}{\partial y}\cos(y, n) + \frac{\partial a_y}{\partial z}\cos(z, n);\\
\frac{\partial a_z}{\partial n} &= \frac{\partial a_z}{\partial x}\cos(x, n) + \frac{\partial a_z}{\partial y}\cos(y, n) + \frac{\partial a_z}{\partial z}\cos(z, n).
\end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

Таким образом, производная векторного поля по некоторому направлению $n$ определяется девятью компонентами: $da_x/dx$, $da_x/dy$, $da_x/dz$, $da_y/dx$, $da_y/dy$, $da_y/dz$, $da_z/dx$, $da_z/dy$, $da_z/dz$ и косинусами между направлением $n$ и координатными осями. Если брать производные векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке $M$ по другим направлениям, то также

получим, что производные от проекций вектора $\vec{a}$ по соответствующим направлениям определяются линейными преобразованиями (2.22) и зависят от входящих в них девяти производных проекций по координатам. Линейные преобразования (2.22) называются аффинными, а входящая в них совокупность из девяти производных составляет аффинный ортогональный тензор второго ранга. Поскольку в этой книге рассматриваются только такие тензоры, будем называть их просто тензорами. Тензор в дальнейшем будем обозначать символом $T$ с соответствующим значком. Приведенный выше тензор в развернутом виде записывается следующим образом:

$$T_a = \begin{Vmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{Vmatrix} \qquad (2.23)$$

Компонентами аффинного ортогонального тензора, конечно, могут быть не только производные от проекций некоторого вектора, но и компоненты, имеющие иной смысл.

## § 3. СПЛОШНАЯ СРЕДА. ТЕНЗОРЫ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

Введем теперь представление о сплошной среде. Понятие сплошной (бесконечно делимой) среды является абстрактным. Реальные вещества, состоящие из молекул и атомов, кристаллов, обладающие неоднородным строением в малых и больших объемах, не являются, конечно, сплошными. Тем не менее представление реальных тел в виде сплошных сред, обладающих свойствами, существенно влияющими на изучаемый процесс, дает вполне приемлемое количественное описание явлений, согласующееся с экспериментальными фактами.

Если сплошная среда представляется как деформируемая, то всякое изменение действующих на эту среду сил должно будет вызывать ее деформацию.

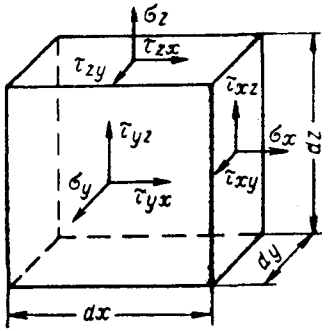


Рис. 6. Элементарный объем среды $dx\ dy\ dz$

Возьмем элементарный объем сплошной среды (рис. 6) в форме куба. Действующие на его грани напряжения состоят из нормальных напряжений $\sigma_x$, $\sigma_y$ и $\sigma_z$ и касательных напряжений $\tau_{xy}$, $\tau_{yx}$, $\tau_{yz}$, $\tau_{zy}$, $\tau_{xz}$, $\tau_{zx}$. Таким образом, напряженное состояние элементарного объема сплошной среды характеризуется девятью компонентами напряжения. Совокупность девяти

компонент напряжения составляет тензор напряжений $T_\sigma$, который представляется в развернутом виде следующим образом:

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Vmatrix}. \qquad (3.1)$$

Элементарный объем должен находиться в равновесии. Следовательно, имеет место равенство нулю полного момента действующих на него сил. Отсюда следует, что $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, и таким образом для описания напряженного состояния элементарного объема среды оказывается достаточным шести компонент напряжения.

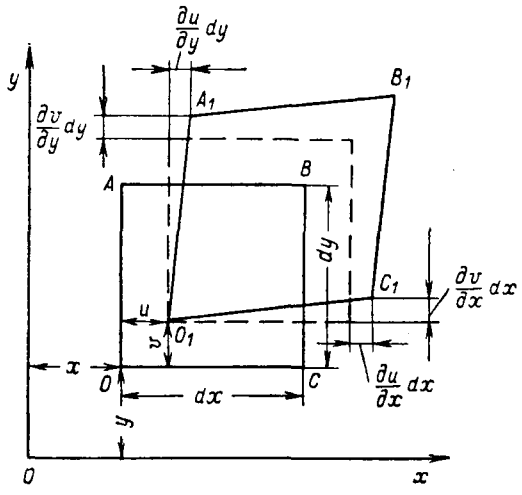



Рис. 7. Деформация грани $dx\ dy$

Величина нормальных и касательных напряжений, действующих на элементарный объем среды, зависит от выбора направлений осей координат, т. е. от ориентации элементарного объема среды в пространстве. Из теории напряжений следует, что элементарный объем деформируемой среды можно мысленно ориентировать в пространстве таким образом, т. е. так выбрать направление координатных осей в каждой точке деформируемой среды, чтобы касательные напряжения оказались равными нулю, а остались одни только нормальные напряжения. Эти нормальные напряжения называются главными нормальными напряжениями, обозначаемыми обычно $\sigma_1$, $\sigma_2$ и $\sigma_3$. Грани элементарного объема среды, на которых действуют главные нормальные напряжения, называются главными плоскостями.

На площадях, делящих углы между главными плоскостями пополам, действуют одни только касательные напряжения $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$, определяемые формулами

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \qquad (3.2)$$

Напряжения $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ называются главными касательными напряжениями.

Из сказанного выше следует, что в каждой точке тела можно создать любое напряженное состояние, задав определенным обра-

зом либо главные нормальные, либо главные касательные напряжения.

Рассмотрим теперь деформацию тела. Нормальные и касательные напряжения, действующие на элементарный объем среды, вызывают смещение и искажение его граней. Как видно из рис. 7 грань элементарного объема, находящаяся в плоскости $x$, $y$, занимала до деформации объема положение $OABC$, а после его деформации эта грань займет уже положение $0_1A_1B_1C_1$, испытав не только перемещение, но и искажение. Относительные изменения длин ребер грани $OABC$ определяются величинами $\varepsilon_x = du/dx$, $\varepsilon_y = dv/dy$, а угол сдвига — величиной $\gamma_{xy} = dv/dx + du/dy$ ($u$, $v$ и $w$ — компоненты смещения элемента в направлениях $x$, $y$ и $z$ соответственно). Для других граней элементарного объема имеем

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Величины $\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$, $\varepsilon_z$, $\gamma_{xy}$, $\gamma_{yz}$, $\gamma_{xz}$ полностью определяют деформацию элементарного объема, образуя тензор деформаций $T_\varepsilon$, записываемый в развернутом виде следующим образом:

$$T_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{Vmatrix}. \tag{3.3}$$

Тензор $T_\varepsilon$ имеет главные относительные удлинения $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ и $\varepsilon_3$ и главные сдвиги $\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, $\gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$.

Для характеристики свойств текучих тел, деформация которых изменяется со временем $t$, требуется рассмотрение тензора скоростей деформации $T_\xi$ с компонентами $\xi_x$, $\xi_y$, $\xi_z$, $\eta_{xy}$, $\eta_{yz}$, $\eta_{xz}$, выражающимися через относительные удлинения так, что $\xi_x = (d/dt)\varepsilon_x$, $\eta_{xy} = (d/dt)\gamma_{xy}$ и т. д.

Напряженное состояние в каждом элементарном объеме сплошной среды можно разложить на всестороннее сжатие (или растяжение), которое характеризуется величиной $\sigma$ — средним нормальным напряжением, и сдвиг, описываемый тензором $D_\sigma$ — девиатором напряжений. Таким образом, имеем

$$T_\sigma = \sigma T_1 + D_\sigma; \tag{3.4}$$

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \tag{3.5}$$

$$T_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{3.6}$$

$$D_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{Vmatrix} \tag{3.7}$$

Величина $T_1$ называется единичным тензором.

Аналогично напряженному состоянию разделяется и деформация, для чего вводятся понятия девиатора деформаций $D_\varepsilon$ и девиатора скорости деформаций $D_\xi$ в виде:

$$D_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \frac{1}{3}\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \frac{1}{3}\varepsilon \end{Vmatrix} \tag{3.8}$$

$$D_\xi = \begin{Vmatrix} \xi_x - \frac{1}{3}\xi & \frac{1}{2}\eta_{xy} & \frac{1}{2}\eta_{xz} \\ \frac{1}{2}\eta_{xy} & \xi_y - \frac{1}{3}\xi & \frac{1}{2}\eta_{yz} \\ \frac{1}{2}\eta_{xz} & \frac{1}{2}\eta_{yz} & \xi_z - \frac{1}{3}\xi \end{Vmatrix} \tag{3.9}$$

Входящие в выражения (3.8) и (3.9) величины $\varepsilon$ и $\xi$ определяются следующим образом:

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \tag{3.10}$$

$$\xi = \xi_x + \xi_y + \xi_z. \tag{3.11}$$

В теории напряжений и деформаций важное значение имеют величины

$$S_\tau = \left\{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]\right\}^{1/2}; \tag{3.12}$$

$$E_\varepsilon = \left\{\frac{1}{6}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]\right\}^{1/2}. \tag{3.13}$$

$S_\tau$ называется интенсивностью касательных напряжений, а $E_\varepsilon$ — интенсивностью сдвига.

Величины $\varepsilon$, $\sigma$, $\xi$, $S_\tau$, $E_\varepsilon$ являются инвариантами — они не зависят от выбора направления осей координат.

Изложенные выше основные понятия теории напряжений и деформаций применимы по отношению к любой деформируемой сплошной среде — вязкой, упругой, пластичной — и могут быть использованы для описания связей между напряжениями и деформациями для любых тел. Эти связи называются реологическими уравнениями состояния.

## § 4. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

В динамике сплошных сред рассматриваются силы, действующие на элементарный объем материальной среды $dV = dx\,dy\,dz$, ускорение и скорость движения этого объема среды. Кроме того, учитываются, хотя и не во всех случаях, факторы, вызывающие диссипацию энергии, например силы вязкости, а также изменение самой энергии.

Будем считать, что на элементарный объем среды действуют нормальные напряжения $\sigma_x$, $\sigma_y$ и $\sigma_z$, касательные напряжения $\tau_{xy}$, $\tau_{yz}$, $\tau_{xz}$ и объемная сила с компонентами $X$, $Y$ и $Z$.

В результате действия сил масса среды плотностью $\rho_c$, заключенная в элементарном объеме, в соответствии с законом Ньютона испытывает ускорение. Поэтому, обозначая полную силу, приложенную к элементарному объему среды, символом $dP$, а производную импульса по времени $d(\rho_c v)/dt$, получаем

$$dP = \frac{d(\rho_c v)}{dt}\,dV. \tag{4.1}$$

Если спроектировать силы и ускорение на направление $0x$ и записать закон (4.1) в развернутом виде, получим

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz - \sigma_x\,dy\,dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\,dy\right) dx\,dz -$$

$$- \tau_{xy}\,dx\,dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy - \tau_{xy}\,dx\,dy +$$

$$+ X\,dx\,dy\,dz = dx\,dy\,dz\,\frac{d(\rho_c v_x)}{dt}. \tag{4.2}$$

Из (4.2) после деления на $dV$ имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X - \frac{d(\rho_c v_x)}{dt} = 0. \tag{4.3}$$

Проектируя силы, действующие на элементарный объем, соответственно на оси $0y$ и $0z$, получим еще два дифференциальных уравнения, описывающих движение элемента сплошной среды:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y - \frac{d(\rho_c v_y)}{dt} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z - \frac{d(\rho_c v_z)}{dt} = 0. \tag{4.4}$$

Система дифференциальных уравнений (4.3)—(4.4) справедлива при описании движения жидкости, газа или твердого вещества, вообще всякой сплошной среды. Если ускорение $d(\rho_c v)/dt = 0$, из (4.3)—(4.4) получаются так называемые уравнения равновесия элемента сплошной среды.

Система дифференциальных уравнений (4.3)—(4.4) не является замкнутой — число неизвестных величин, входящих в уравнения

превышает число уравнений. Для получения замкнутой системы уравнений, описывающих движение сплошной среды, необходимо использовать зависимость между напряжениями и деформациями или скоростями деформаций, присущую данной сплошной среде как физическому телу. Для замыкания системы дифференциальных уравнений (4.3)—(4.4) используются также законы сохранения вещества и энергии.

Рассмотрим в качестве примера сплошной среды вязкую жидкость.

Выделим элементарный объем жидкости $abcd$ длиной $dx$, высотой $dz$ и шириной, измеряемой в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, равной единице (рис. 8). Скорость течения изменяется с изменением координаты $z$. Например, скорость течения

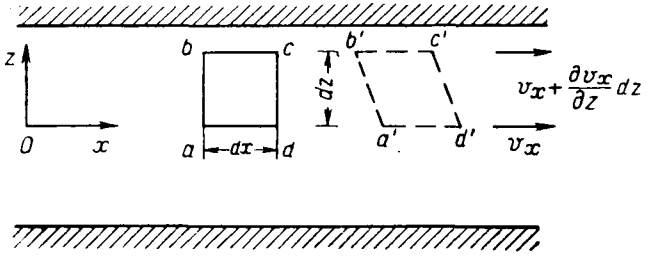



Рис. 8. Деформация объема вязкой жидкости $abcd$

в плоскости $ad$ равна $v_x$, а в плоскости $bc$ она равна уже $v_x + (dv_x/dx)dx$. Поэтому, если следить за изменением ранее выделенного объема $abcd$, то этот объем через промежуток времени $dt$ исказится и примет форму $a'b'c'd'$. Можно также рассматривать не изменяющийся во времени объем пространства $dV$, в который втекает и из которого вытекает жидкость.

Ньютон предложил для жидкостей следующую зависимость между напряжением сдвига $\tau$, возникающим на гранях $ab$, $cd$ и $a'b'$, $c'd'$, и производной скорости по соответствующей координате:

$$\tau = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial z}. \qquad (4.5)$$

Коэффициент пропорциональности $\mu$ называется коэффициентом вязкости или просто вязкостью жидкости. Экспериментальные исследования течения вязкой жидкости подтверждают зависимость (4.5). Однако она выполняется не для всех жидкостей, хотя класс этих жидкостей весьма обширен. К нему, например, принадлежат вода, множество различных масел, нефтей и нефтепродуктов, многие органические жидкие вещества и т. д. Жидкости, при течении которых имеет место зависимость (4.5), называются ньютоновскими.

Вязкость $\mu$ измеряется в пуазах (Пз), имеющих размерность $PL^{-2}T$. Слабоминерализованная вода при комнатной температуре обладает вязкостью около 0,01 Пз = 1 сПз $\approx 10^{-8}$ кгс·с/см$^2$.

Для того чтобы получить, наконец, уравнения движения вязкой жидкости, нужно принять зависимость между девиатором напряжений $D_\sigma$ и девиатором скоростей деформации $D_\xi$.

Обычно используются две гипотезы: первая — о равенстве среднего нормального напряжения $\sigma$ давлению жидкости $p$ (с обратным знаком) и вторая — о несжимаемости жидкости, т. е.

$$\sigma = -p; \tag{4.6}$$

$$\xi = 0. \tag{4.7}$$

Зависимость между девиатором напряжений и девиатором скоростей для вязкой жидкости имеет вид:

$$D_\sigma = 2\mu D_\xi. \tag{4.8}$$

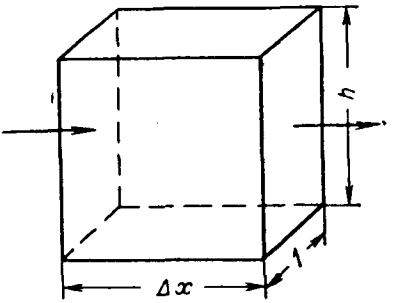



Рис. 9. Элементарный объем среды длиной $\Delta x$

После умножения каждого члена $D_\xi$ на $2\mu$ и приравнивания его соответствующему члену $D_\sigma$ получаем зависимость между компонентами напряжения и производными от скоростей в следующем виде:

$$\sigma_x = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - p, \quad \sigma_y = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - p;$$

$$\sigma_z = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - p;$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right);$$

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right). \tag{4.9}$$

Подставляя (4.9) в уравнения движения (4.3)—(4.4) и учитывая (4.7), получаем систему уравнений Навье — Стокса, описывающих движение вязкой ньютоновской жидкости:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x = \frac{d(\rho_ж v_x)}{dt};$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y = \frac{d(\rho_ж v_y)}{dt};$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z = \frac{d(\rho_ж v_z)}{dt}, \tag{4.10}$$

где $\rho_ж$ — плотность жидкости.

Как уже было сказано ранее, во многих случаях для замыкания системы уравнений динамики сплошной среды требуется использовать закон сохранения движущегося вещества, т. е. закон, или уравнение, неразрывности массы. Для большей наглядности получим это уравнение сначала в одномерном случае. Пусть слева (рис. 9)

в элементарный объем, имеющий форму параллелепипеда высотой $h$, шириной, равной единице, длиной $\Delta x$, втекает некоторое вещество плотностью $\rho$, а справа это вещество вытекает из элементарного объема. За время $\Delta t$ в элементарный объем входит масса вещества, равная $\Delta M$, причем

$$\Delta M = \rho v h \Delta t, \tag{4.11}$$

где $v$ — скорость движения вещества.

Справа из элементарного объема выходит следующая масса вещества:

$$\Delta M - \delta \Delta M = \rho v h \Delta t - \Delta(\rho v) h \Delta t = \rho v h \Delta t - \frac{\Delta(\rho v)}{\Delta x} h \Delta x \Delta t. \tag{4.12}$$

Приращение массы вещества в элементарном объеме за время $\Delta t$

$$\delta M = h \Delta x \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \Delta t. \tag{4.13}$$

Закон сохранения массы требует, чтобы было $-\Delta M = \delta M$, т. е.

$$\frac{\Delta(\rho v)}{\Delta x} + \frac{\Delta \rho}{\Delta t} = 0. \tag{4.14}$$

Переходя в (4.14) к пределу, т. е. полагая $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, получаем уравнение неразрывности массы в одномерном случае

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{4.15}$$

Теперь можно вывести уравнение неразрывности массы в общем случае. Для этого рассмотрим некоторый объем среды $V$. Масса вещества, содержащегося в этом объеме, составляет $\iiint\limits_V \rho dV$. Изменение массы вещества в объеме $V$ со временем $t$ будет

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_V \rho \, dV.$$

Из объема $V$ через поверхность $S$ в единицу времени вытекает количество вещества, равное

$$-\iint\limits_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

Приравнивая эти количества, получаем

$$\iiint\limits_V \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} dV + \iint\limits_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0. \tag{4.16}$$

По теореме Остроградского имеем

$$\iint\limits_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_V \operatorname{div} \rho \vec{v} \, dV. \tag{4.17}$$

Внося (4.17) в (4.16), получаем

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v}\right) dV = 0. \tag{4.18}$$

Выражение (4.18) справедливо для любого объема $V$. Поэтому должно быть равно нулю подынтегральное выражение в (4.18), т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \tag{4.19}$$

В определенных случаях, например при изучении фильтрации, уравнение неразрывности массы вещества является основным исходным уравнением. Связь между силами (давлением) и скоростями получается не путем интегрирования уравнений Навье — Стокса, а путем использования так называемых законов фильтрации.

При изучении движения сжимаемой жидкости (газа) используются термодинамические уравнения, описывающие связь между давлением, удельным объемом и температурой жидкости.

Для решения задач механики сплошных сред к приведенным выше уравнениям нужно добавить еще начальные и граничные условия. Начальные условия определяют распределение искомой функции или ее производных в начальный момент времени. Граничными условиями задается значение функции или ее производных на границе изучаемой области сплошной среды.

## § 5. ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим вначале течение вязкой жидкости в трубе, имеющей круглое сечение. Это течение является осесимметричным. Совместим ось $z$ с осевой линией трубы, а перпендикулярно ей направим радиальную координату $r$ (рис. 10). Поскольку течение симметрично относительно оси $z$, уравнения Навье — Стокса для установившегося течения значительно упрощаются. Из трех уравнений остается лишь одно

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right),$$

$$v = v_z(r), \quad v_r = 0. \tag{5.1}$$

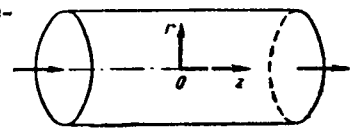



Рис. 10. Труба круглого сечения

При этом, так как характер течения в каждом сечении трубы, перпендикулярном ее оси, является одним и тем же, перепад давления вдоль трубы $dp/dz$ должен быть постоянным, т. е.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = c = \text{const}. \tag{5.2}$$

Интегрирование уравнения (5.1) при условии (5.2) не составляет трудностей. В результате получаем следующее выражение для скорости:

$$v = \frac{c}{\mu}\frac{r^2}{4} + B\ln r + D, \tag{5.3}$$

где $B$ и $D$ — постоянные интегрирования.

Исходя из того, что на оси трубы при $r = 0$ напряжение сдвига, а следовательно, и производная $dv/dr$ не должны обращаться в бесконечность, следует положить $B = 0$.

Пусть при $r = 0$ $v = v_0$, а на стенке трубы при $r = R$ $v = 0$. Тогда из (5.3) получаем следующее распределение скорости по радиусу:

$$v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{5.4}$$

Отсюда

$$c = -\frac{4\mu v_0}{R^2}. \tag{5.5}$$

Имея распределение скорости по радиусу (5.4), легко найти полный расход жидкости $q$. Так,

$$q = 2\pi\int_0^R v(r)r\,dr = 2\pi\int_0^R v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)r\,dr = \frac{\pi v_0 R^2}{2}. \tag{5.6}$$

Полагая $c = -dp/dz = |\Delta p/l|$, где $l$ — длина участка трубы, а $\Delta p$ — перепад давления на этом участке, имеем из (5.5)

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{4\mu v_0}{R^2} \tag{5.7}$$

или с учетом (5.6)

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{8\mu q}{\pi R^4} = \frac{128\mu q}{\pi d^4}. \tag{5.8}$$

Выражение (5.8) широко известно в гидравлике как формула Пуазейля.

Преобразуем теперь эту формулу таким образом, чтобы в нее входила безразмерная величина $vd\rho/\mu$ (число Рейнольдса $N_{\mathrm{Re}}$). Имеем

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{64}{N_{\mathrm{Re}}}\frac{\rho_{\text{ж}} v^2}{2d}. \tag{5.9}$$

Величину $\lambda = \dfrac{64}{N_{\mathrm{Re}}}$ называют коэффициентом сопротивления.

Формула Пуазейля справедлива для таких случаев, когда движение жидкости в трубе происходит концентрическими слоями, без вихрей, при постоянстве скоростей. Это движение называется ламинарным. Оно в обычных технических условиях осуществляется при сравнительно малых числах Рейнольдса, не превышающих 2000—2300. При больших числах Рейнольдса движение вязкой жидкости

в трубе становится турбулентным, и для него перестает быть справедливой изложенная выше теория.

Для математического описания турбулентного течения в трубах может быть использована теория М. Д. Миллионщикова [77], со-

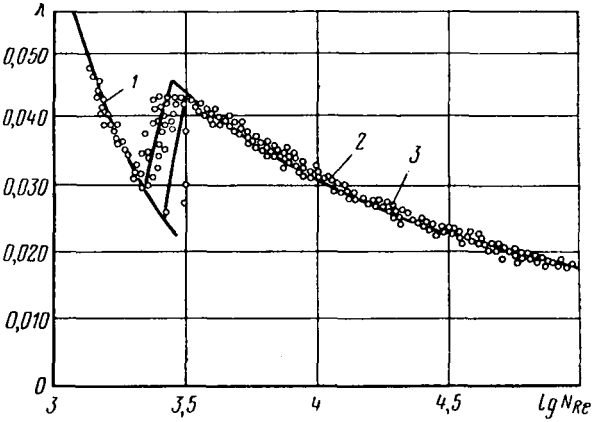



**Рис. 11. Зависимость $\lambda = \lambda(N_{Re})$ для труб круглого сечения:**

*1* — течение Пуазейля; *2* — расчетная зависимость М. Д. Миллионщикова [77]; *3* — экспериментальные точки

гласно которой турбулентное течение полагается состоящим из ламинарного пристенного слоя и турбулентного потока. При этом течение как в ламинарном слое, так и в турбулентном потоке представляется в виде суперпозиции катящихся вихрей.

На рис. 11 дана широко известная экспериментальная зависимость параметра $\lambda$ от $N_{Re}$ в области ламинарного и турбулентного течений. Как видно из рис. 11, расчетная зависимость М. Д. Миллионщикова практически в точности совпадает с экспериментальной зависимостью $\lambda = \lambda(N_{Re})$ в области турбулентного течения.

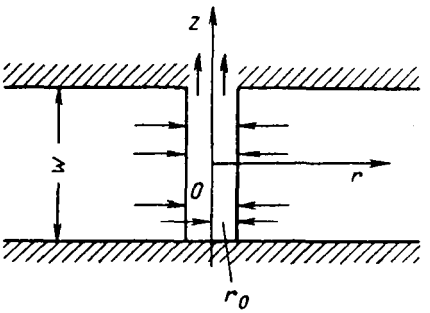



**Рис. 12. Радиальное течение вязкой жидкости между параллельными плоскостями**

Течение Пуазейля является не только ламинарным, но и безынерционным. В качестве примера течения вязкой жидкости, при котором могут существенным образом проявляться силы инерции, рассмотрим осесимметричное течение между двумя плоскостями. Это течение является

одним из частных случаев течения вязкой жидкости в диффузорах [59] — полостях переменного сечения.

Согласно рис. 12 будем считать, что течение вязкой жидкости происходит от периферии к цилиндрической полости радиусом $r_0$. Ширина зазора между параллельными плоскостями равна $w$. Примем, что течение является установившимся, $v_z = 0$, а $v_r = v_r(r, z)$. Тогда будем иметь одно уравнение Навье — Стокса вместо трех:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_ж} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho_ж} \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right). \quad (5.10)$$

К уравнению (5.10) следует добавить еще уравнение неразрывности, имеющее в данном случае следующий вид:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0. \quad (5.11)$$

Из уравнения (5.11) получаем

$$v_r(r, z) = \frac{f(z)}{r}. \quad (5.12)$$

Подставляя (5.12) в (5.10), получаем уравнение

$$\mu f'' + \frac{\rho_ж}{r^2} f^2 - r \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (5.13)$$

Рассмотрим один из предельных случаев данного течения, когда основную роль играют силы вязкости и вторым членом в уравнении (5.13) можно пренебречь. В этом случае

$$\mu f'' - r \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (5.14)$$

Выполняя граничное условие $v_r = 0$ при $z = \pm w/2$, получаем следующее выражение:

$$\mu f = \frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial r} \left( z^2 - \frac{w^2}{4} \right). \quad (5.15)$$

Считая, что полный расход жидкости постоянен и равен $q$, имеем

$$2\pi r \int_{-w/2}^{w/2} v_r(r, z)\, dz = -q. \quad (5.16)$$

Отсюда

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{6q\mu}{\pi w^3} \quad (5.17)$$

или

$$p = p_0 + \frac{6q\mu}{\pi w^3} \ln \frac{r}{r_0}, \quad (5.18)$$

где $p_0$ — давление при $r = r_0$.

Второй предельный случай рассматриваемого течения имеет место, когда основную роль в течении играют инерционные силы,

а вязкостными силами можно пренебречь. Из уравнения (5.13) в данном предельном случае получаем

$$\frac{\rho_ж}{r^2} f^2 - r\frac{\partial p}{\partial r} = 0. \tag{5.19}$$

Для решения уравнения (5.19) осредним величину $f^2$ по высоте зазора $w$ и обозначим через $\bar{f}$ среднее по высоте зазора значение $f$. Для того чтобы произвести это осреднение, необходимо знать функцию $f(z)$. Зададимся приближенно видом функции $f(z)$, определенным формулой (5.15). Тогда с учетом (5.17) получим

$$(\bar{f})^2 = \frac{q^2}{4\pi^2} = \frac{0{,}25q^2}{\pi^2};$$

$$(\bar{f^2}) = \frac{0{,}3q^2}{\pi^2}. \tag{5.20}$$

Поскольку, как это видно, из (5.20), способ осреднения функции $f$ сравнительно мало влияет на ее величину, примем в качестве среднего значения $f^2$ величину $q^2/4\pi^2$. Интегрируя уравнение (5.19) и выполняя условие $p = p_0$ при $r = r_0$, получаем следующую формулу для распределения давления:

$$p - p_0 = \frac{\rho_ж q^2}{8\pi^2 w^2}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right). \tag{5.21}$$

Как видно из формулы (5.21), инерционное течение жидкости между параллельными плоскостями возможно и при бесконечно большом внешнем радиусе, т. е. при $r \to \infty$ с конечным перепадом давления.

Если использовать предположение о параболическом распределении скорости $v_r$ по вертикали, можно получить формулу для изменения давления жидкости по радиусу, учитывающую как вязкостные, так и инерционные силы. На основе тех же предположений, что и при выводе формул (5.18) и (5.21), получаем для данного общего случая формулу

$$p - p_0 = \frac{6q\mu}{\pi w^3}\ln\frac{r}{r_0} + \frac{\rho_ж q^2}{8\pi^2 w^2}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right). \tag{5.22}$$

Проведем расчеты по формуле (5.22). Допустим, что $q = 1000$ м$^3$/сут $= 1{,}16 \cdot 10^4$ см$^3$/с, $\rho_ж = 10^3$ кг/м$^3$, $\mu = 1$сПз $\approx 10^{-8}$ кг·с/см$^2$, $r = 100$ м, $r_0 = 0{,}1$ м, $w = 10^{-1}$ см.

Вычислим величину $\frac{(p - p_0)\, w^3}{q\mu}$ в соответствии с формулой (5.22). Первая из величин, стоящих в правой части формулы (5.22), т. е. $\frac{6}{\pi}\ln\frac{r}{r_0}$, будет при принятых выше значениях параметров равна 13,2. Вторая же величина

$$\frac{\rho_ж q w}{8\pi^2 g\mu}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) = 14{,}7.$$

Таким образом, в данных условиях как вязкостные, так и инерционные силы вносят примерно одинаковую долю в величину перепада давления. Если увеличить вязкость жидкости, например, до 1 Пз, то вязкостные силы будут значительно превосходить инерционные. Важно отметить, что перепад давления от вязкостных сил растет пропорционально расходу жидкости, а от инерционных — пропорционально квадрату расхода.

## § 6. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

При решении плоских задач гидродинамики и теории упругости применяются методы теории функций комплексного переменного. В этом параграфе даны некоторые основные сведения из теории функций комплексного переменного, необходимые для понимания помещенного ниже материала.

Функция комплексного переменного

$$z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1} \tag{6.1}$$

обозначается

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{6.2}$$

Эта функция является дифференцируемой (аналитической) в точке $z$, если удовлетворяются условия Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6.3}$$

Возьмем в качестве примера функцию

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi; \tag{6.4}$$

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Эта функция является дифференцируемой, что легко проверить, подставив (6.4) в (6.3). Функция же

$$f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad u = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = 0 \tag{6.5}$$

не является дифференцируемой, что также легко проверяется при подстановке (6.5) в (6.3).

Если продифференцировать первое условие (6.3) по $x$, а второе по $y$ и сложить полученные равенства, то получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{6.6}$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{6.7}$$

Следовательно, как вещественная, так и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа.

Обозначим теперь $\zeta = f(z)$. Пусть $f(z)$ является аналитической однолистной функцией в некоторой области $D$ комплексного переменного $z$ и имеет в этой области отличную от нуля производную. Однолистной функцией называется такая функция, для которой каждой точке из области $D$ комплексного переменного $z$ соответствует единственная точка в области $D_*$ комплексного переменного $\zeta$. Аналитическая функция $\zeta = f(z)$, обладающая описанными выше свойствами, осуществляет конформное преобразование области $D$ в область $D_*$, называемое так по той причине, что в каждой паре соответствующих друг другу точек $z_0$ и $\zeta_0$ областей $D$ и $D_*$ сохраняются углы между двумя бесконечно малыми отрезками, выходящими из точек $z_0$ и $\zeta_0$. Точки, где производная $_5'(z) = 0$, являются точками разветвления.

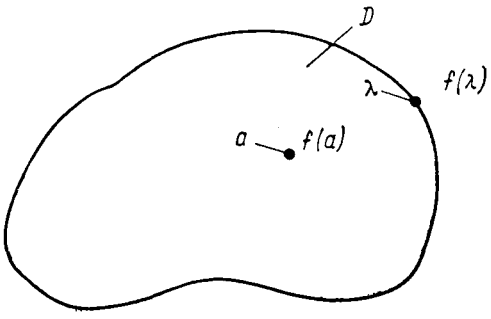


Рис. 13. Область комплексного переменного $D$

Рассмотрим в качестве примера функцию Н. Е. Жуковского

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right). \quad (6.8)$$

Эта функция переводит окружности области комплексного переменного $\zeta$ в эллипсы области комплексного переменного $z$. В самом деле, полагая $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$, получаем, отделяя мнимую и вещественную части функции (6.8),

$$x = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\vartheta, \quad y = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\vartheta. \quad (6.9)$$

Окружности $\rho = \text{const}$ в плоскости $\zeta$ переходят в эллипсы плоскости $z$, уравнение которых имеет вид:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2} = 1. \quad (6.10)$$

Как видно из (6.10), окружность $\rho = 1$ области $\zeta$ переходит в бесконечно тонкую щель области $z$, так что точки на окружности $\rho = 1$ переходят в точки на границе щели с координатами $x = \cos\vartheta$, $y = 0$. Точки $x = \pm 1$ являются для функции Н. Е. Жуковского точками разветвления, поскольку из них выходят две линии, ограничивающие бесконечно тонкую щель.

Интеграл в области комплексного переменного $z$ определяется как интеграл вдоль некоторой кривой $L$, заданной в этой области, так что

$$F(z) = \int_L f(z)\,dz. \quad (6.11)$$

Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области, то интеграл (6.11) вдоль любого замкнутого контура, принадлежащего указанной области, равен нулю. Односвязной областью называется область, ограниченная одним замкнутым контуром. Пусть имеем односвязную область $D$, ограниченную контуром $\lambda$ (рис. 13). Функция $f(z)$, аналитическая в области $D$, в точке $a$ принимает значение $f(a)$, а на контуре $\lambda$ — значение $f(\lambda)$. В теории функций комплексного переменного важное значение имеет формула Коши, согласно которой для аналитической функции $f(z)$ имеем

$$f(a) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda}\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{z-\lambda}. \tag{6.12}$$

Формула Коши позволяет определить значение аналитической функции в любой точке $z$, принадлежащей области, в которой функция аналитична, по значению этой функции на контуре области.

Интеграл, записанный в форме (6.12), в которой $f(\lambda)$ является граничным значением функции, называют интегралом типа Коши. Подынтегральное выражение в нем стремится к бесконечности при $z \to \lambda$, и поэтому этот интеграл считают существующим везде в области, где определена функция $f(z)$, кроме самого контура, т. е. рассматривают его главное значение.

## § 7. УРАВНЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Имея уравнения движения элемента сплошной среды, легко получить уравнения теории упругости. Если тело является упругим, ему присущи следующие зависимости между компонентами тензоров напряжений и деформаций

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_x = \lambda\varepsilon + 2\mu'\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda\varepsilon + 2\mu'\frac{\partial v}{\partial y};\\
&\sigma_z = \lambda\varepsilon + 2\mu'\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{yz} = \mu'\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right);\\
&\tau_{xz} = \mu'\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \tau_{xy} = \mu'\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right);\\
&\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\\
&\mu' = \frac{E}{2(1+\nu)}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Входящие в (7.1) величины $E$ и $\nu$ являются соответственно модулем Юнга и коэффициентом Пуассона. Символами $u$, $v$ и $w$ обозначены компоненты смещения в направлениях $x$, $y$ и $z$.

При подстановке зависимостей (7.1) в уравнения движения получаем уравнения, описывающие упругие смещения. Записывая эти уравнения в векторной форме, имеем

$$(\lambda + 2\mu')\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \mu'\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} + \vec{M} - \rho_c \vec{a} = 0, \qquad (7.2)$$

где $M$ — вектор массовой силы; $u$ и $a$ — соответственно векторы смещения и ускорения.

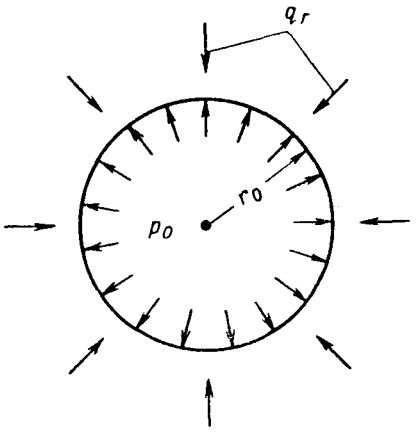



Рис. 14. Деформация сферической полости:
$q_г$ — горное давление

В ряде случаев оказывается необходимым определять деформации, а не смещения. Тогда нужно, помимо уравнений движения или равновесия, использовать также систему уравнений неразрывности (совместности) деформаций. Эта система получается в результате последовательного дифференцирования зависимостей между компонентами деформации и смещения и соответствующих подстановок. Система уравнений совместности деформаций имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x\,\partial z}; \qquad (7.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\,\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\,\partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x\,\partial z}.$$

В качестве примера рассмотрим упругую деформацию сплошной среды, простирающейся по всем направлениям до бесконечности, если в некоторой точке среды образована полость шаровой формы. Этот пример может относиться на практике к деформации полости, созданной, например, в горных породах в результате их размыва и выщелачивания. Пусть радиус полости равен $r_0$ (рис. 14). Полость заполнена жидкостью или газом, оказывающими на ее внутреннюю поверхность давление $p_0$. На большом расстоянии от полости (на

бесконечности) напряжение горных пород характеризуется равномерным сжатием. Будем считать, что смещения пород и напряжения являются центрально-симметричными. Массовые силы и ускорения отсутствуют. В этом случае уравнение (7.2) принимает следующий простой вид:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr}+\frac{2u}{r}\right)=0. \tag{7.4}$$

Имеем также две компоненты напряжения $\sigma_r$ и $\sigma_\theta$, определяемые зависимостями

$$\sigma_r=(\lambda+2\mu')\frac{du}{dr}+2\lambda\frac{u}{r};\quad \sigma_\theta=\lambda\frac{du}{dr}+2(\lambda+\mu')\frac{u}{r};$$

$$\sigma=\frac{\sigma_r+2\sigma_\theta}{3}. \tag{7.5}$$

Решая уравнение (7.4), получаем

$$\left.\begin{aligned} u&=C_1r+\frac{C_2}{r^2};\\ \sigma_r&=(3\lambda+2\mu')C_1-4\mu'\frac{C_2}{r^3};\\ \sigma_\theta&=(3\lambda+2\mu')C_1+2\mu'\frac{C_2}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

где $C_1$ и $C_2$ — постоянные величины.

Выполним, в соответствии со сказанным выше, условия

$$\sigma_r=\sigma_\theta=q_\Gamma=\text{const}\quad \text{при}\quad r\to\infty; \tag{7.7}$$

$$\sigma_r=p_0\qquad\qquad \text{при}\quad r=r_0.$$

В результате получаем следующие формулы:

$$\sigma_r=q_\Gamma-\frac{(q_\Gamma-p_0)r_0^3}{r^3};\quad \sigma_\theta=q_\Gamma+\frac{(q_\Gamma-p_0)r_0^3}{2r^3}. \tag{7.8}$$

Как видно из формул (7.8), напряжения $\sigma_r$ и $\sigma_\theta$ убывают пропорционально кубу расстояния от центра полости. При $p_0=0$ имеем

$$\sigma_r=q_\Gamma\left(1-\frac{r_0^3}{r^3}\right);\quad \sigma_\theta=q_\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\frac{r_0^3}{r^3}\right). \tag{7.9}$$

При $r=r_0$ $\sigma_r=0$, а $\sigma_\theta=3/2q_\Gamma$ независимо от радиуса полости $r_0$.

Оценим, например, прочность такой полости, используя в качестве критерия прочности предельную зависимость интенсивности касательных напряжений $S_*$ от предельного среднего нормального напряжения $\sigma_*$, в виде:

$$S_*=\left\{\frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]\right\}^{1/2}=a+b\sigma_*, \tag{7.10}$$

где $a$ и $b$ — постоянные коэффициенты.

В рассматриваемом случае $\sigma_r$ и $\sigma_\theta$ являются главными напряжениями. Положим $\sigma_r = \sigma_1$, $\sigma_\theta = \sigma_2 = \sigma_3$. Тогда, используя также (7.5), получим из (7.10)

$$S_* = \frac{\sqrt{3}}{3} |(\sigma_r^* - \sigma_\theta^*)| = a + b\,\frac{\sigma_r^* + 2\sigma_\theta^*}{3}. \qquad (7.11)$$

В формуле (7.11) звездочкой сверху помечены предельные значения соответствующих напряжений, при которых внутренняя стенка полости начинает разрушаться. В случае $p_0 = 0$ при $r = r_0$ $\sigma_\theta = 3/2 q_\Gamma$. Тогда

$$\frac{\sqrt{3}}{2} q_\Gamma^* = a + b q_\Gamma^* \qquad (7.12)$$

или

$$q_\Gamma^* = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2} - b}. \qquad (7.13)$$

При $a = 9{,}81 \cdot 10^6$ Па $= 100$ кгс/см$^2$, $b = 0{,}7$, $q_\Gamma^* \approx 6 \cdot 10^7$ Па $=$ $= 610$ кгс/см$^2$.

Таким образом, шаровая полость при данных условиях может выдержать довольно значительную нагрузку — ведь предельное напряжение в $6 \cdot 10^7$ Па может соответствовать глубине залегания пород порядка $2400 \div 2500$ м.

Приведем теперь без промежуточных формул еще одно весьма важное для горного дела решение задачи теории упругости о деформации среды вокруг вертикальной выработки цилиндрической формы (ствола шахты или скважины).

Уравнение равновесия упругой среды, определяющее радиальное смещение, имеет в этом случае вид:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) = 0. \qquad (7.14)$$

Распределение напряжений осесимметричное. При $r \to \infty$ $\sigma_z = q_\Gamma$, $\sigma_r = \sigma_\theta = q_\infty$, а при $r = r_c$ $\sigma_r = p_c$. Тогда

$$\sigma_r = q_\infty - (q_\infty - p_c)\frac{r_c^2}{r^2}; \qquad (7.15)$$

$$\sigma_\theta = q_\infty + (q_\infty - p_c)\frac{r_c^2}{r^2}.$$

Выражения (7.15) известны в теории упругости как формулы Ламэ. Если $p_c = 0$ при $r = r_c$, имеем $\sigma_r = 0$, $\sigma_\theta = 2\,q_\infty$.

Если требуется определить прочность необсаженного ствола скважины или шахты, то следует использовать зависимости интенсивности касательных напряжений от среднего нормального напряжения, подобные приведенным выше.

Рассмотрим теперь примеры напряженного состояния среды, зависящего от двух координат, например $x$ и $y$. Как и в приведенных выше решениях, деформация будет считаться статической.

Уравнения равновесия и условия совместности деформаций принимают теперь следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}. \tag{7.16}$$

Задачи теории упругости, в которых напряжения и деформации описываются системой уравнений (7.16), называются плоскими. Решения этих задач получаются с использованием теории функций комплексного переменного [80]. При этом смещения и напряжения выражаются через аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$.

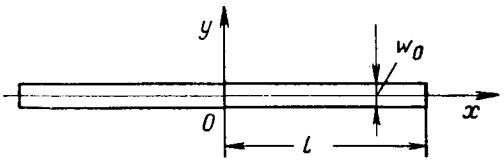


Рис. 15 Щель шириной $w_0$

Смещения $u$ и $v$ соответственно вдоль осей $x$ и $y$ представляются в комплексной форме следующим образом:

$$2\mu'(u+iv)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\frac{d\varphi}{dz}}-\overline{\psi(z)}, \tag{7.17}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические функции комплексного переменного $z$, $\varkappa = 3-4\nu$.

В формуле (7.17) чертой сверху помечены соответствующие сопряженные функции комплексного переменного $z$. Выражение $\overline{d\varphi}/dz$ есть сопряженное значение производной функции $\varphi$ по переменному $z$.

Напряжения $\sigma_x$, $\sigma_y$ и $\tau_{xy}$ определяются формулами

$$\sigma_x+\sigma_y=2\left(\frac{d\varphi}{dz}+\overline{\frac{d\varphi}{dz}}\right); \tag{7.18}$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\left(\bar{z}\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{d\psi}{dz}\right).$$

Приведенные выше формулы Лямэ справедливы, как это следует из сказанного, для случаев, когда давление на поверхность шахтного ствола или скважины является равномерным и сама среда нагружена равномерной, не зависящей от направления радиуса нагрузкой. С помощью методов решения плоских задач теории упругости можно определить напряженное состояние и тогда, когда нагрузка на контур круглого отверстия в плоскости является несимметричной, а также когда отверстие не является круглым.

Пусть, например, в безграничной плоской упругой среде имеется очень тонкая щель (рис. 15) шириной $w_0$ и длиной $2l$, причем $w_0 \ll 2l$. Таким образом, данную щель можно считать бесконечно тонкой трещиной. Среда на бесконечности сжата напряжением $q_\infty$, а внутри щели к ее поверхности приложено давление $p$. Поскольку в дальнейшем будет приниматься во внимание лишь дополнительная деформация среды, т. е. не будет учитываться ее деформация от всестороннего сжатия напряжением $q_\infty$, можно считать, что напряжение на бесконечности равно нулю, а на контур щели действует напряжение $P = p - q_\infty$.

Решение этой задачи теории упругости получим методом Н. И. Мусхелишвили [80], для чего применим следующие данные им формулы:

$$2\mu'(u+iv) = \varkappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)};$$

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f}{\sigma-\zeta}\,d\sigma; \qquad (7.19)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\bar{f}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma - \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta};$$

$$f(\sigma) = i\int_S F_n\,dS = i\int_S (\sigma_{nx} + i\sigma_{ny})\,dS.$$

Во вторую и третью формулы (7.19) входят интегралы типа Коши. В эти формулы входит также конформное преобразование области комплексного переменного $z = x + iy$ в область комплексного переменного $\zeta$, реализуемое функцией $\omega(\zeta) = z$. При этом в формулах (7.19) обозначено $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$ ($\rho$ и $\vartheta$ — переменные в новой плоскости $\zeta$). Если в плоскости комплексного переменного $z$ контур «выемки» в сплошной среде, т. е. в щели, представляет собой два примыкающих друг к другу отрезка прямой длиной $2l$ (см. рис. 15), то в области комплексного переменного $\zeta$ этот контур принимает иную форму в зависимости от вида функции $\omega(\zeta)$. Символом $\sigma$ обозначено значение переменного $\zeta$ на контуре при $\rho = 1$, так что $\sigma = e^{i\vartheta}$. Это обозначение не следует смешивать со средним нормальным напряжением, которое в теории упругости по традиции также обозначается символом $\sigma$. Усилие, действующее на произвольный контур $\lambda$ в плоскости $z = x + iy$, обозначается $P_n$ (рис. 16), причем $P_n = \sigma_{nx} + i\sigma_{ny}$.

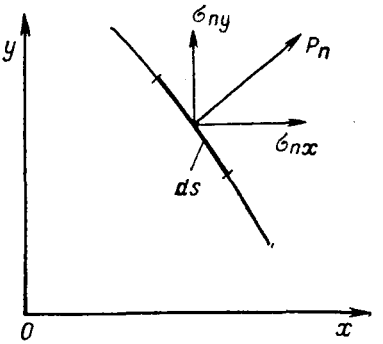


Рис. 16. Действие усилий на контур $dS$

При решении рассматриваемой задачи удобно использовать функцию, конформно отображающую область сплошной среды, в которой имеется бесконечно тонкая щель, на область $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$ вне круга единичного радиуса. Этой функцией является функция Н. Е. Жуковского

$$\omega(\zeta) = z = \frac{l}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right). \tag{7.20}$$

При $\zeta = \sigma = e^{i\vartheta}$, т. е. на контуре щели, $y = 0$. Отсюда

$$x = \frac{l}{2}(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) = l\cos\vartheta. \tag{7.21}$$

По формулам (7.19) имеем

$$f(\sigma) = -Px, \quad \varphi(\zeta) = -\frac{Pl}{2\zeta}; \quad \psi(\zeta) = -\frac{Pl\zeta}{\zeta^2 - 1}. \tag{7.22}$$

Смещения на контуре щели определяются более простой формулой, получаемой из первой формулы (7.19):

$$2\mu'(u + iv) = \varkappa\varphi(\sigma) - \overline{\varphi(\sigma)}. \tag{7.23}$$

Подставляя (7.22) в (7.23), получаем выражение для полного раскрытия щели $w = 2v$ в следующем виде:

$$w(x) = \frac{4(1-\nu^2)Pl}{E}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^{1/2}. \tag{7.24}$$

Допустим теперь, что все-таки существует некоторая начальная ширина щели $w_0$, конечно, малая по сравнению с длиной щели $l$. В этом случае также можно считать справедливым приведенное выше решение теории упругости.

Начальный объем щели $V_0$, отнесенный к единице толщины среды в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка (см. рис. 15), равен $2w_0 l$. Вычислим изменение объема щели в результате деформации среды при изменении давления $P$. В соответствии с формулой (7.24) имеем

$$\Delta V = 2\int_0^l w(x)\,dx = \frac{8(1-\nu^2)Pl}{E}\int_0^l \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^{1/2} dx =$$

$$= \frac{2\pi(1-\nu^2)Pl^2}{E}. \tag{7.25}$$

Рассмотрим относительное изменение объема щели $\beta^*$, определяемое следующим образом:

$$\beta^* = \frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta P}, \quad \Delta P \to 0. \tag{7.26}$$

Тогда

$$\beta^* = \frac{\pi(1-\nu^2)}{E}\frac{l}{w_0} \tag{7.27}$$

или

$$\beta^* \approx \frac{1}{E} \frac{l}{w_0} \tag{7.28}$$

Из формулы (7.28) видно, что относительное изменение объема щели зависит от отношения $l/w_0$. При больших $l/w_0$ небольшие изменения давления в щели будут приводить к значительным изменениям ее объема. При отношении $l/w_0$, мало отличающемся от единицы, величина «сжимаемости» щели будет иметь такой же порядок, что и сжимаемость среды. Этот факт является важным для понимания механизма деформации трещиноватых горных пород, насыщенных жидкостью.

## ГЛАВА II

# СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД, ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

### § 1. ГОРНЫЕ ПОРОДЫ

При изучении подземных процессов важное значение имеет знание свойств горных пород. Добываемые в настоящее время нефть и газ залегают в самом верхнем слое земной коры, на глубинах, не превышающих 5—6 км. Вообще же земной корой называют верхний слой нашей планеты мощностью 30—50 км. Этот слой Земли, а также атмосфера и Мировой океан содержат почти все элементы периодической системы. При этом 98,5% вещества земной коры составляют восемь элементов — кислород, кремний, алюминий, железо, кальций, натрий, калий и магний. Земная атмосфера содержит 78% азота и 21% кислорода и лишь 1% составляют углекислота и инертные газы. В воде океана находится около половины всех известных элементов.

Химические элементы довольно редко встречаются в природе в чистом виде. В большинстве случаев они входят в состав химических соединений или смесей. Вещества земной коры, состоящие из одного химического соединения, называются минералами. Хорошо известными примерами минералов являются кварц $SiO_2$, известняк $CaCO_3$, магнетит $Fe_3O_4$ и др. Многие минералы имеют кристаллическое строение.

Горными породами называются более сложные вещества, состоящие из совокупности минералов. Многие горные породы, залегающие в земной коре, имеют полости — поры, каверны, трещины, карстовые пустоты и т. д., являющиеся емкостью, в которой могут содержаться вода, нефть и газ.Горные породы, обладающие емкостью, которая может быть заполнена жидкими и газообразными веществами, называются породами-коллекторами. Породы, в емкости которых содержатся нефть и газ, называются коллекторами нефти и газа.

Породы — коллекторы нефти и газа бывают различных типов. По характеру емкостного пространства коллекторы делятся на поровые, трещинные, кавернозные и смешанного типа, т. е. порово-трещинные, порово-трещинно-кавернозные и т. д. По характеру пород

коллекторы делятся на два основных типа: терригенные, состоящие из осадочных пород, и карбонатные, образовавшиеся в результате химических реакций в земной коре или жизнедеятельности организмов.

Наиболее широко распространенными представителями терригенных коллекторов являются пески, песчаники и песчано-глинистые породы. Зерна песков имеют размер от 0,1 мм и более, частицы же песчаников и глинистых песчаников имеют размер до 0,01 мм и меньше.

Емкостное пространство карбонатных коллекторов часто бывает представлено трещинами и кавернами. Трещины бывают самого разнообразного размера: от микротрещин шириной в несколько сотых или тысячных долей миллиметра до макротрещин, поперечный размер которых может исчисляться метрами. Каверны в карбонатных коллекторах также имеют различный размер.

Поры, трещины и каверны в коллекторах изучают в результате исследования образцов пород, извлекаемых на поверхность при бурении скважин колонковыми долотами. Однако трещины и каверны не всегда можно исследовать таким путем, так как трещинные коллекторы могут обладать сравнительно малой густотой трещин и каверн, так что бывает трудно отобрать образцы пород с такими трещинами и кавернами, которые характеризуют трещиноватость и кавернозность пласта в целом. Кроме того, происходит разрушение образцов по поверхности трещин. Поэтому трещинные и кавернозные коллекторы необходимо изучать с более широким использованием гидродинамических и геофизических методов.

К числу главных характеристик пород-коллекторов относится пористость, определяемая как отношение объема пор породы $V$ к ее общему объему $V_{\text{п}}$, так что для пористости $m$ имеем формулу

$$m = \frac{V}{V_{\text{п}}}. \tag{1.1}$$

Различают абсолютную и эффективную пористость. Абсолютная пористость представляет собой отношение полного объема полостей в породе к общему объему породы, а эффективная пористость — отношение объема только сообщающихся друг с другом пор к объему породы.

Один из методов определения абсолютной пористости состоит в том, что сначала замеряют общий объем породы, потом, после ее размола, плотность частиц размолотой породы и затем определяют по весу породы объем ее твердого вещества. Разность между общим объемом породы и объемом твердого вещества равна объему пор. Отношение объема пор к общему объему породы равно абсолютной пористости. Эффективную пористость замеряют по количеству вошедшей в породу жидкости со взвешиванием породы до и после входа в нее жидкости. Конечно, в настоящее время известно много косвенных способов определения пористости пород, использующих

различные физические закономерности, такие, например, как зависимость от пористости электрического сопротивления пород, проницаемости, капиллярного давления и т. д.

Пористость является геометрическим параметром, характеризующим внутреннюю структуру породы. Другим геометрическим параметром является удельная поверхность породы. Если определить каким-либо образом внутреннюю поверхность породы, т. е. поверхность зерен породы и связующего зерна материала, и отнести эту поверхность к объему исследуемого образца породы, то и получим параметр $S_у$, называемый удельной поверхностью породы. Если принять, что пористая среда составлена из $n$ шаров одинакового диаметра $d$ при их кубической укладке, то объем $n$ шаров равен $\frac{n\pi d^3}{6}$, а их поверхность будет $n\pi d^2$. Таким образом, для такой пористой среды

$$S_у = \frac{6n\pi d^2}{n\pi d^3} = \frac{6}{d}. \qquad (1.2)$$

С уменьшением диаметра частиц удельная поверхность возрастает. Если песчано-глинистую породу с размерами зерен порядка 0,001 см представить в виде упомянутой выше среды, то для нее удельная поверхность составит 6000 см$^2$/см$^3$ = $6 \cdot 10^5$ м$^2$/м$^3$. Это значит, что один кубический метр породы имеет внутреннюю поверхность, равную 60 га.

Наконец, важнейшей характеристикой пород — коллекторов нефти и газа является их способность пропускать через себя (фильтровать) жидкости и газы. Эта способность определяется проницаемостью пород. Фильтрация жидкостей и газов и связь проницаемости с другими характеристиками пород будут рассмотрены ниже. Теперь же перейдем к описанию деформационных и прочностных свойств горных пород.

Геологические и геофизические исследования, разработка месторождений нефти и газа вызывают необходимость механического воздействия на горные породы. Механические процессы — деформация, разрушение, колебание — происходят в горных породах и без вмешательства человека — при землетрясениях, извержениях вулканов, приливах и т. д. Для количественного описания механических свойств горных пород используются представления механики сплошных сред.

Горные породы имеют более сложную структуру, чем минералы,— они состоят не только из кристаллов основных составляющих их веществ, но и из зерен и включений других минералов. Поэтому, используя методы механики сплошных сред, нужно оговаривать, что представляет собой элементарный объем пород, охватывает ли он много зерен и включений или речь идет о деформации отдельного зерна породы или включения. Конечно, чаще всего рассматривают деформацию больших массивов пород, содержащих огромное число зерен породы.

Не существует четкого критерия, который бы количественно

определял, сколько нужно включать зерен породы в элементарный объем с тем, чтобы этот объем можно было считать «бесконечно малым». О правильности выбора элементарного объема можно судить лишь по тому, достаточно ли хорошо согласуются решения соответствующих уравнений механики сплошных сред с экспериментальными данными.

Всякое изменение сил, действующих на горные породы в земной коре, вызывает их деформацию, а также изменение внутренних усилий в горных породах — напряжений. Зависимости между напряжениями и деформациями в элементарном объеме горных пород определяются свойствами пород и являются одними из основных механических характеристик пород как физических тел.

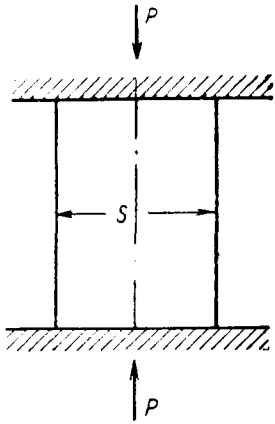


Рис. 17. Деформация образца породы

Эти зависимости, или реологические уравнения состояния пород, обычно получаются в результате анализа экспериментальных данных. Эксперименты показывают, что хрупкие горные породы, такие, как граниты, базальты, твердые известняки и песчаники, при не очень сильном всестороннем сжатии (до $10^8 \div 2 \cdot 10^8$ Па, т. е. до $1000 \div 2000$ кгс/см$^2$) деформируются упруго до достижения предела прочности, и использование уравнения состояния идеально упругих тел для описания их деформации не вызывает значительных осложнений. Многие же пористые горные породы могут деформироваться либо нелинейно-упруго, либо линейно-упруго, но необратимо, с остаточной деформацией. Изучению деформационных и прочностных свойств горных пород посвящены известные монографии К. В. Руппенейта [99], Л. А. Шрейнера и др. [75], В. М. Добрынина [41], Б. В. Байдюка [9] и др.

При определении деформационных свойств горных пород лабораторными методами используют различные виды напряженных состояний. Наиболее простым видом напряженного состояния является одноосное сжатие. Для имитации этого напряженного состояния образцы горных пород, имеющие форму цилиндра или параллелепипеда, сжимают под прессом, замеряя напряжение $\sigma_z = P/S$ ($P$ — усилие, создаваемое прессом, $S$ — площадь поперечного сечения образца), а также деформацию $\varepsilon_z$ (рис. 17).

Известны методики определения деформационных и прочностных свойств горных пород, когда образцы пород берутся в форме толстостенных цилиндров и в них имитируется известное в теории упругости напряженное состояние Лямэ или создается [75] напряженное состояние в результате вдавливания в породу жесткого круглого штампа (рис. 18) под действием усилия $P$ с замером вертикального смещения $w$.

Во всех этих случаях, пользуясь соответствующими формулами теории упругости, можно определить теоретическую зависимость $\sigma_z = \sigma_z(\varepsilon_z)$ и по ней на основе экспериментальных данных — характеристики упругого состояния. Показанная на рис. 19 зависимость $\sigma_z = \sigma_z(\varepsilon_z)$ (линия *1*) соответствует линейной упругости (закону

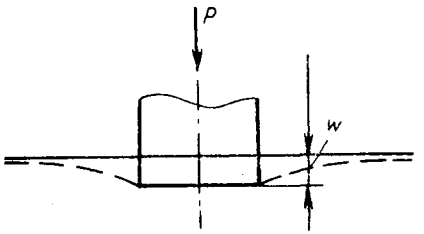



Рис. 18. Вдавливание круглого штампа в породу

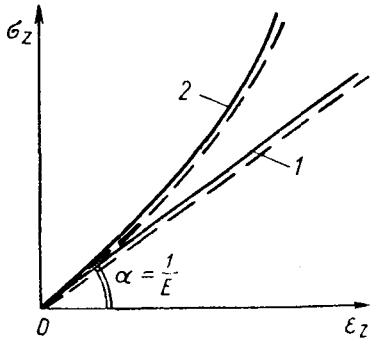



Рис. 19. Зависимость $\sigma_z = \sigma_z(\varepsilon_z)$

Гука); зависимость *2* представляет нелинейную упругость. На рис. 19 пунктиром показаны линии разгружения — они при отсутствии пластической деформации повторяют линии нагружения.

Для некоторых горных пород, даже обладающих практически линейной упругостью, характерна необратимая деформация, т. е.

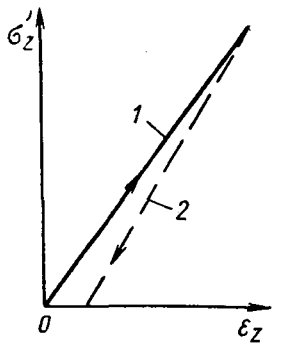



Рис. 20. Зависимость $\sigma_z = \sigma_z(\varepsilon_z)$ при нагружении и разгружении

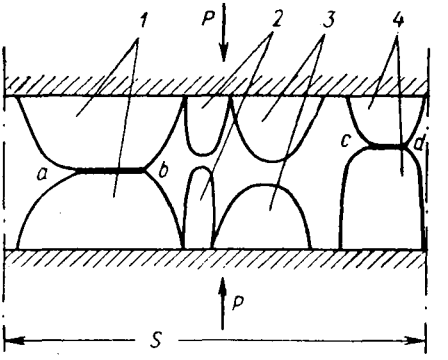



Рис. 21. Контакты зерен породы

линия разгружения *2* (рис. 20) не совпадает с линией нагружения *1*.

Если подходить более точно к объяснению необратимой деформации, то следует полагать эту деформацию пород неупругой, т. е. считать, что уже в процессе нагружения горной породы наблюдалась ее текучесть.

Этот вид деформации не следует смешивать с нелинейной упругостью, когда зависимость $\sigma_z = \sigma_z(\varepsilon_z)$ является нелинейной, но обратимой. Нелинейная упругость может наблюдаться у пористых горных пород, например песчаников, особенно при значительных нагружениях — до $10^7 \div 10^8$ Па.

Явление нелинейной упругости пористых горных пород объясняется изменением площади контактов зерен пород при их сжатии. Рассмотрим, например, два параллельных сечения пористой горной породы (рис. 21), сжимаемой изменяющимся во времени усилием $P$, действующим на площади $S$. При небольших сжимающих усилиях $P$ контакт зерен породы может происходить только, например, по линиям (поверхностям) $ab$ и $cd$ зерен породы *1* и *4*. При увеличении же усилия $P$ начинают контактировать зерна *2* и *3*. Площади контактов могут вообще увеличиваться во всех зернах, показанных на рис. 21. Для линейно-упругого тела (см. рис. 19, линия *1*) имеет место зависимость

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \tag{1.3}$$

где $E$ — модуль упругости (модуль Юнга).

Для пористого тела (см. рис. 21), зерна которого обладают линейной упругостью, следует согласно сказанному выше положить

$$\varepsilon_z = \frac{P}{S_к(\varepsilon_z)\,E}, \tag{1.4}$$

где $S_к(\varepsilon_z)$ — зависящая от деформации, а следовательно, и от усилия $P$ площадь контактов зерен породы.

Экспериментально трудно определить $S_к(\varepsilon_z)$, поэтому относят усилие $P$ к неизменной площади породы $S$ (см. рис. 17), полагая $\sigma_z = P/S$. Тогда из (1.4) получаем

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{j(\varepsilon_z)\,E}, \qquad j(\varepsilon_z) = \frac{S_к(\varepsilon_z)}{S}. \tag{1.5}$$

Если, например, можно положить при малых деформациях, что относительная площадь контактов $j(\varepsilon_z) \sim \varepsilon_z$, то из (1.5) получаем

$$\frac{\sigma_z}{E} \sim \varepsilon_z^2. \tag{1.6}$$

Таким образом, уже в этом случае деформация пористой породы в целом является нелинейно-упругой.

Нелинейная упругость проявляется у песчаников, алевролитов и других пористых пород особенно значительно, если диапазон изменения нагрузки довольно велик и исчисляется величинами порядка $10^7 \div 10^8$ Па. При малых же изменениях нагрузки на пористые породы, особенно при их естественном залегании в земной коре, когда они уже сжаты горным давлением, можно считать деформацию таких пород с определенным приближением линейно-упругой.

Имеются данные [41], что и объемная деформация пористых горных пород при больших нагрузках происходит нелинейно-упруго. Если $V$ — первоначальный объем горной породы, то величина

$$\beta_{\text{п}} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{d\sigma} \tag{1.7}$$

характеризует объемную деформацию породы и называется сжимаемостью породы.

Та же причина, которая вызывает нелинейную деформацию пористых горных пород, приводит и к нелинейной сжимаемости пород. На рис. 22 представлена характерная зависимость $\beta_{\text{п}}$ от $\sigma$ для алевролитов и некоторых песчаников. Обычно такие зависимости

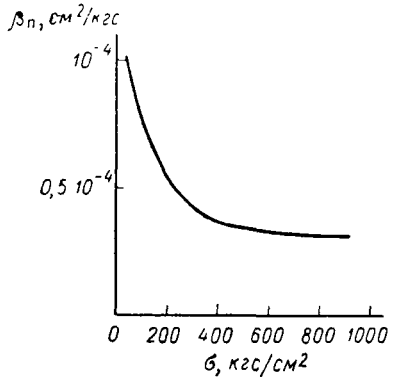



Рис. 22. Зависимость $\beta_{\text{п}}$ от $\sigma$

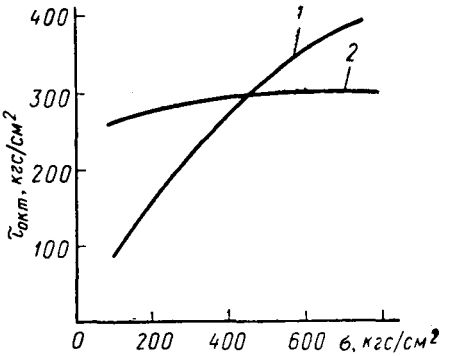



Рис. 23. Зависимость $\tau_{\text{окт}}$ от $\sigma$

получаются в случаях, когда $\sigma$ изменяется в пределах от 0 до $5 \cdot 10^7 \div 10^8$ Па (500 ÷ 1000 кгс/см²).

Любые горные породы, даже если их деформация при малых нагрузках происходит по закону линейной упругости, при больших напряжениях и деформациях начинают течь или разрушаться.

Если горная порода находится в таком состоянии, что под действием напряжений она уже не деформируется упруго, то считается, что достигнут ее предел текучести или прочности.

В тех областях деформации горных пород, где превзойден предел прочности, породы могут либо деформироваться пластически, либо хрупко разрушаться, либо непрерывно течь.

Обычно для описания напряженного состояния горных пород, когда происходит их разрушение или пластическая деформация, используют зависимость между предельным значением интенсивности касательных напряжений $S_*$ и средним нормальным напряжением $\sigma_*$.

Можно вместо интенсивности касательных напряжений пользоваться «октаэдрическим касательным напряжением» $\tau_{\text{окт}} = (2/3)^{1/2} S_*$. На рис. 23 представлены зависимости $\tau_{\text{окт}}$ от $\sigma$ для двух типов пород. Зависимость *1* характерна для пород, обладающих способ-

ностью упрочняться при сжатии. Такими породами могут быть алевролиты, прочные глины, сланцы. Зависимость *2* относится к мало упрочняющимся породам, таким, как малопрочные глины, способным течь. Прочные породы, способные хрупко разрушаться, обладают значительной упругой и малой неупругой деформацией.

Выше были рассмотрены лишь самые простые уравнения состояния деформирующихся горных пород. В природе могут встречаться такие породы и такие виды деформации, когда появляется необходимость одновременного учета, например их упругого и вязкого поведения [79], т. е. когда деформация существенно зависит от времени или когда деформация породы в каждый момент времени зависит от процесса деформации в целом, т. е. от «истории» процесса деформации.

## § 2. ПЛАСТОВЫЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗЫ

Основными веществами, находящимися в земной коре в жидком и газообразном состояниях, являются вода и углеводороды. В этих веществах могут содержаться в виде примесей многие элементы и химические соединения. Например, подземные воды почти всегда являются минерализованными, т. е. содержат в растворенном состоянии соли. В углеводородных газах, насыщающих горные породы, в качестве примесей могут находиться сероводород, углекислый газ, инертные газы.

Общее количество солей в подземных водах колеблется от долей процента до 40—50% по весу (рассолы). Таким образом, подземные воды могут иметь значительно более высокую минерализацию, чем вода океана, которая, например, содержит около 3—4% соли [28].

Наиболее распространены подземные воды, содержащие в растворе соли хлористоводородной, серной, угольной и азотной кислот. Металлами, входящими в состав солей, являются натрий, калий, магний, кальций, железо и др. Воды нефтяных месторождений могут также содержать йод и бром.

Природные углеводороды распространены в земной коре в виде нефти, газа и битумов. Они входят в состав углей и горючих сланцев. Нефть содержит не только углеводороды, но и другие вещества— примеси. В качестве примесей нефть может содержать азот, серу, кислород в чистом виде или в виде химических соединений [20, 114].

Углеводороды — химические соединения, состоящие из углерода и водорода, различающиеся между собой не только соотношением атомов углерода и водорода в молекулах, но и структурой молекул. Существуют углеводороды парафинового и олефинового ряда, а также нафтеновые и ароматические углеводороды. К парафиновому ряду углеводородов принадлежат метан $CH_4$, этан $C_2H_6$, пропан $C_3H_8$, бутан $C_4H_{10}$ и т. д. Общая формула углеводородов этого ряда имеет вид $C_nH_{2n+2}$. Эти углеводороды называют также алканами.

Углеводороды парафинового ряда характеризуются значительной химической инертностью. Это свойство обусловило сохранение

их в естественных условиях в нефтях в течение геологических периодов.

При давлении 760 мм рт ст. и температуре 16° С первые четыре соединения парафинового ряда являются газами, углеводороды от $C_5H_{12}$ до $C_{17}H_{36}$ — жидкостями, а от $C_{18}H_{38}$ и выше — твердыми веществами.

Общая химическая формула углеводородов олефинового ряда имеет вид $C_nH_{2n}$. Первый член этого ряда — этилен $C_2H_4$.

Углеводороды олефинового ряда содержат меньшее количество атомов водорода, приходящихся на один атом углерода, по сравнению с углеводородами парафинового ряда. Поэтому они называются также ненасыщенными. Эти углеводороды более химически активны, чем углеводороды парафинового ряда, и реже встречаются в природных нефтях.

Имеются также ненасыщенные углеводороды с двумя двойными связями в молекуле. Они называются диолефинами и характеризуются формулой $C_nH_{2n-2}$. Углеводороды с тройной связью в молекуле принадлежат к ацетиленовому ряду. Наиболее простой углеводород этого ряда — ацетилен.

Все рассмотренные выше углеводороды характеризуются незамкнутостью молекулярных цепей. Известны углеводороды с замкнутыми цепями, т. е. имеющие циклическое строение. К ним относятся нафтеновые и ароматические углеводороды.

Нафтеновые углеводороды имеют формулу $C_nH_{2n}$ и называются иначе циклопарафинами или цикланами. Первым членом этого ряда является углеводород $C_3H_6$, называемый циклопропаном.

Циклопарафины стабильны в химическом отношении и часто встречаются в природных нефтях.

Ароматическими называются углеводороды с циклическим строением, имеющие в своей структуре бензольное кольцо. Основной углеводород этого вида — бензол. Общая формула ароматических углеводородов имеет вид $C_nH_{2n-6}$. Эти соединения достаточно стабильны и часто встречаются в нефтях. В состав природных нефтей входят, хотя и в небольшом количестве (0,1—2%), кислородные соединения, представленные главным образом нафтеновыми и жирными кислотами. Эти вещества способны входить в соединение с щелочами, содержащимися в некоторых водах, и образовывать мыла, растворимые в воде [114]. Важную роль при разработке нефтяных месторождений играют такие компоненты нефтей, как парафины и церезины, особенно если их содержание в нефтях достаточно высоко (12—20%). При понижении температуры пласта или выделении газа из нефти эти вещества выпадают из нефти и образуют твердую фазу. Эта фаза взвешена в жидкой нефти, однако может накапливаться в пористой среде, снижать ее пропускную способность и ухудшать условия извлечения нефти из недр [85, 111]. Наконец, в нефтях содержатся такие высокомолекулярные соединения, как смолы и асфальтены, в количестве, зависящем от природы нефтей (от долей до десятков процентов). В пластовых условиях эти вещества нахо-

дятся в нефти в виде истинных или коллоидных растворов [114]. При отгонке из нефти легких фракций смолы и асфальтены остаются в виде густой смолистой массы (гудрона).

Перечисленные выше углеводороды входят в природные нефти и газы в самых различных пропорциях, так что нефть представляет собой чрезвычайно сложную смесь углеводородов, состав которой может меняться не только на различных нефтяных месторождениях,

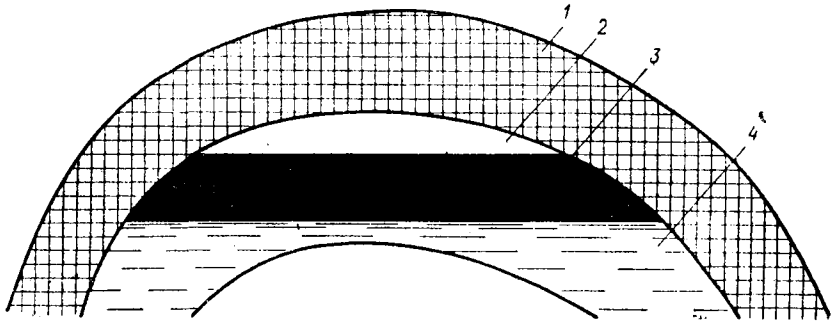



Рис. 24. Антиклинальная складка

но и в пределах одного и того же месторождения. Отдельные углеводороды нефтей или природных газов будем называть их компонентами.

Скопления нефти в земной коре — нефтяные залежи — находятся только в таких геологических структурах, откуда они не могли

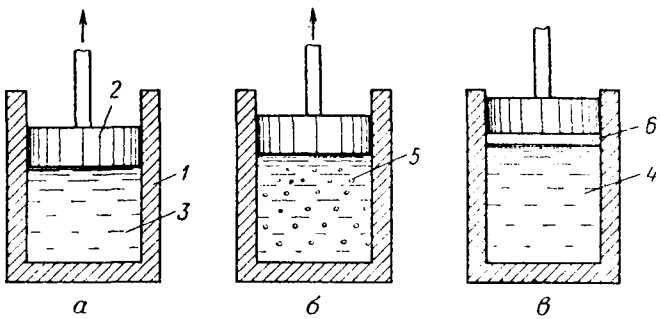



**Рис. 25. Разгазирование пластовой нефти:**

*1* — цилиндр; *2* — поршень; *3* — нефть с растворенным в ней газом; *4* — дегазированная нефть; *5* — пузырьки газа; *6* — газ

мигрировать в течение геологического времени, прошедшего с момента их образования. В нефтяной геологии структурные формы, содержащие нефти и газ, называют «ловушками». Распространенным типом структуры-ловушки является антиклинальная складка (рис. 24), продуктивный пласт в которой перекрыт непроницаемыми породами *1*. В самом пласте, представленном пористыми горными поро-

дами, содержатся газ *2*, нефть *3* и вода *4*. Под действием силы тяжести нефть, газ и вода разделяются, причем газ, как более легкое вещество, занимает повышенную часть структуры, нефть — среднюю ее часть, а вода — самую нижнюю.

Нефть и газ не при любых условиях могут существовать в пласте раздельно. Это определяется относительным содержанием газа в пласте (отношением, например, веса газа к весу нефти в пласте), растворимостью газа в нефти, давлением и температурой в пласте. Разделение пластовых углеводородов на нефть и газ может быть условным. Пластовые углеводороды в залежах представляют собой системы, в которых при различных температурах могут изменяться не только относительные содержания газовой фазы в нефтях, но и происходить более сложные превращения. Состояния таких систем будут рассмотрены ниже. Здесь же пока будем основываться на приближенном представлении пластовой нефти как смеси, состоящей из двух компонентов — жидкой нефти и растворяющегося в ней газа.

Пусть имеем недеформирующийся сосуд со свободно движущимся поршнем (рис. 25). В сосуде под поршнем находится нефть с растворенным в ней газом при начальном давлении $p_0$. Сосуд содержится при неизменной температуре. Подвинем поршень несколько вверх, как это показано на рис. 25, *а*. Нефть займет больший объем, и давление под поршнем станет $p_1 < p_0$. Если продолжать снижать давление в нефти, то она не останется однофазной жидкостью — при давлении $p = p_н$ из нефти начнут выделяться пузырьки газа (рис. 25, *б*). При дальнейшем уменьшении давления первоначальная нефть разделится на нефть и газ (рис. 25, *в*).

При движении поршня вниз давление в цилиндре начнет увеличиваться и газ будет растворяться в нефти.

Давление $p_н$, при котором из нефти начинает выделяться растворенный в ней газ, называется давлением насыщения.

Описанный выше процесс выделения газа из нефти используется при определении давления насыщения нефтей. При этом, помещая пластовую нефть в бомбу высокого давления, измеряют объем нефти вместе с растворенным в ней газом в зависимости от давления. Когда газ полностью растворен в нефти, изменение ее объема $V$ происходит в соответствии с законом сжимаемости жидкой фазы (рис. 26, линия *1*). При выделении же газа из раствора изменение давления в в бомбе будет происходить соответственно сжимаемости системы нефть — газ (см. рис. 26, линия *2*). Эта система обладает более высокой сжимаемостью, чем жидкая нефть, и поэтому наклон линии *2* в координатах $p$, $V$ к оси $V$ меньше, чем наклон линии *1*. Точка пересечения этих линий, которые можно в определенном диапазоне изменения давления считать прямыми, соответствует давлению насыщения. В примере, показанном на рис. 26, давление насыщения равно $1{,}42 \cdot 10^7$ Па (142 кгс/см$^2$).

Описанное выше представление сложной углеводородной смеси, какой является нефть в виде условной двухкомпонентной смеси,

состоящей из нефти — первого «компонента» и газа — второго «компонента», дает удовлетворительные результаты в целом ряде инженерных расчетов. Аналогично представляются также природные газоконденсатные смеси в виде условных двухкомпонентных смесей из «газа» и «конденсата». Для такой смеси определяются термодинамические зависимости, например зависимости количества выделяющегося (выпадающего) из смеси конденсата от давления и температуры. Конечно, и в этом случае «газ» и «конденсат» представляют собой сложную совокупность отдельных углеводородов, но в ряде практических случаев оказывается возможным не учитывать полный компонентный состав этой смеси. В других же случаях необходимо более полно учитывать компонентный состав смеси. Следует, однако, отметить, что полный учет компонентного состава углеводородов в расчетах разработки реальных месторождений является весьма трудоемким, поэтому обычно и ограничиваются представлениями реальных смесей в виде условных смесей, состоящих из двух или трех компонентов, фактически включающих в себя многие углеводороды.

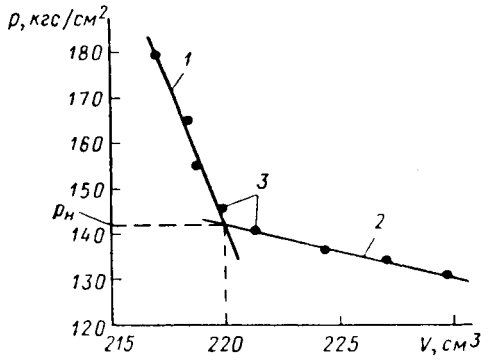



Рис. 26. Зависимость $p$ от $V$:
*1* — жидкая фаза; *2* — двухфазная смесь (нефть и газ); *3* — экспериментальные точки

В расчетах, связанных с разработкой месторождений углеводородов, чаще всего рассматриваются простые изменения физического состояния веществ, такие как выделение газа из нефти, выпадение конденсата из газа и т. д. В связи с разработкой более глубоко залегающих месторождений нефти и газа и применением новых методов разработки появляется необходимость знать поведение веществ в более широком диапазоне изменения условий.

Рассмотрению состояния многокомпонентных веществ посвящен следующий параграф.

## § 3. pVT-СООТНОШЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ

Наука о веществе основывается на современых знаниях об атомах — мельчайших частицах элементов и молекулах — мельчайших частицах химических соединений. Атомы имеют размер порядка $10^{-8}$ см (одного ангстрема). Крупные молекулы, содержащие тысячи атомов, имеют размер около $10^{-6}$ см.

Характер движения молекул и атомов, их взаимодействие определяют, в каком агрегатном состоянии находится вещество — в твердом, жидком или газообразном.

Молекулы могут совершать поступательное, вращательное и колебательное движение. Если вещество находится в газообразном или жидком состоянии, то возможны все три вида этих движений. Если же вещество затвердевает, преобладающей формой движения молекул и атомов становятся колебания.

При изучении состояния вещества стремятся найти взаимосвязь между давлением, при котором находится вещество, его плотностью и температурой. Если обозначить давление $p$, плотность $\rho$, а обратную ей величину — удельный объем вещества $V$ и температуру $T$, то состояние вещества будет характеризоваться соотношением $p$, $V$ и $T$ или, как принято в термодинамике, $pVT$-соотношением.

Наиболее просто это соотношение выглядит для состояния вещества, при котором молекулы совершают поступательное движение в период между столкновениями друг с другом, а межмолекулярные силы заметно не проявляются. Такое состояние вещества характерно для достаточно разреженных газов. Вещество, находящееся в этом состоянии, называют идеальным газом.

Представление об идеальном газе, несмотря на его упрощенность, с успехом используется в расчетах движения природных газов как в нефтегазоносных пластах, так и в трубах.

$pVT$ — соотношение идеального газа получается из кинетической теории газов. В этой теории рассматривается идеальный газ, помещенный в замкнутый сосуд объемом $V$. Давление газа, действующее на стенки сосуда, возникает в результате ударов молекул газа о стенки.

Пусть средняя скорость молекул газа равна $\overline{v}_{\text{м}}$. Согласно кинетической теории газов,

$$p = \frac{M_{\text{о}} N \overline{v}_M^2}{3V}, \tag{3.1}$$

где $M_{\text{о}}$ — масса одной молекулы; $N$ — число молекул в объеме газа $V$.

Кинетическая энергия $E_{\text{к}}$ всех молекул, заключенных в замкнутом объеме $V$, составляет

$$E_{\text{к}} = N M_{\text{о}} \frac{\overline{v}_M^2}{2}. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) получаем

$$pV = \frac{2}{3} E_{\text{к}}. \tag{3.3}$$

Для газа, молекулы которого совершают только поступательное движение, принимается следующее выражение для кинетической энергии:

$$E_{\text{к}} = \frac{3}{2} RT \tag{3.4}$$

где $T$ — абсолютная температура; $R$ — газовая постоянная.

Газовую постоянную выражают также через постоянную Больцмана $k_B$ и $N$ — число молекул в одном граммоле следующим образом:

$$R = Nk_B. \tag{3.5}$$

При $N = 6{,}0247 \cdot 10^{26}$ 1/кмоль и $k_B = 1{,}3805 \cdot 10^{-23}$ Дж/К $R =$ $= 8310$ Дж/К·кмоль.

Подставляя (3.4) в (3.3), получаем уравнение состояния идеального газа:

$$pV = RT. \tag{3.6}$$

При высоком сжатии газа его параметры уже не будут описываться уравнением состояния идеального газа. Рассмотрим уравнение Ван дер Ваальса, учитывающее отклонение поведения газов от уравнения (3.6). При выводе этого уравнения принимаются во внимание два обстоятельства: конечность объема самих молекул и взаимодействие молекул при их сильном сближении.

Ван дер Ваальсом были введены в уравнение состояния идеального газа (3.6) поправки: величина $b$, учитывающая объем самих молекул, и величина $\frac{a}{V^2}$, учитывающая взаимодействие между молекулами. В результате было получено уравнение состояния «реального газа» (уравнение Ван дер Ваальса) в следующем виде:

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}. \tag{3.7}$$

При описании состояния реальных газов оказалось, что и уравнение (3.7) не всегда точно согласуется с результатами экспериментов.

На практике часто пользуются эмпирическими методами описания состояния реальных газов. Один из таких методов заключается в том, что $pVT$-соотношение для одного граммоля реального газа записывается по аналогии с соответствующим соотношением для идеального газа в виде:

$$pV = z(p, T)RT. \tag{3.8}$$

Коэффициент $z$, входящий в уравнение (3.8), называемый коэффициентом сжимаемости, в свою очередь зависит от давления и температуры. Коэффициент сжимаемости многих газов, в том числе углеводородных, можно определять из закона соответственных состояний, согласно которому величина $z$ оказывается одной и той же для всех реальных газов при одних и тех же значениях приведенных температур и давлений $T_{пр} = T/T_к$ и $p_{пр} = p/p_к$ ($T_к$ и $p_к$ — так называемые критические температура и давление, физический смысл которых будет объяснен ниже).

В случае газовых смесей, состоящих из $n$ газов, вместо $T_к$ и $p_к$ используются псевдокритические температура и давление $T_к^*$, $p_к^*$, определяемые по формулам

$$T_к^* = \sum_0^n y_i T_{к\,i}, \quad p_к^* = \sum_0^n y_i p_{к\,i}, \tag{3.9}$$

где $y_i$ — молярная доля $i$-го компонента в смеси; $T_{к\,i}$, $p_{к\,i}$ — критические температура и давление $i$-го компонента.

Таблица 1

| Компонент | Химическая формула | Молекулярный вес | Критическая температура, °С | Критическое давление, $10^5$ Па |
|---|---|---|---|---|
| Метан | $CH_4$ | 16,04 | —82,4 | 45,0 |
| Этан | $C_2H_6$ | 30,07 | 32,3 | 47,3 |
| Пропан | $C_3H_8$ | 44,09 | 96,8 | 41,2 |
| *н*-Бутан | $C_4H_{10}$ | 58,12 | 153,1 | 35,2 |
| Изобутан | $C_4H_{10}$ | 58,12 | 134,0 | 36,2 |
| *н*-Пентан | $C_5H_{12}$ | 72,15 | 197,2 | 32,4 |
| Изопентан | $C_5H_{12}$ | 72,15 | 187,8 | 32,3 |
| Углекислый газ | $CO_2$ | 44,01 | 30,5 | 71,5 |
| Азот | $N_2$ | 28,02 | 147,2 | 32,8 |
| Сероводород | $H_2S$ | 34,08 | 100,5 | 87,0 |

В табл. 1 даны значения критических давлений и температур для ряда компонентов природного газа [20].

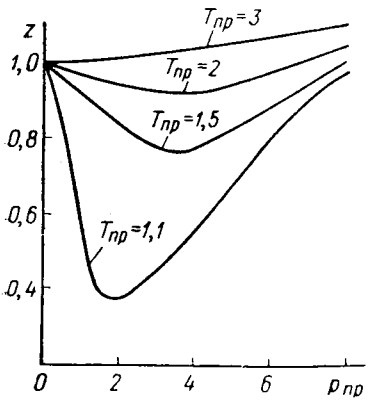



Рис. 27. Зависимость $z$ от $p_{пр}$ и $T_{пр}$

На рис. 27 представлена зависимость коэффициента сжимаемости $z$ от приведенных давления и температуры для природных газов.

При определенных давлениях и температурах вещество может находиться в жидком состоянии. Для жидкостей отсутствует достаточно простая общая модель состояния, подобная модели идеального газа. Поэтому состояние каждой жидкости приходится характеризовать собственными частными формами $pVT$-соотношений, получаемыми экспериментальным путем.

Например, зависимость удельного объема жидкости $V$ от давления $p$ часто выражают в виде:

$$V = V_0 \exp[-\beta_ж (p - p_0)], \tag{3.10}$$

где $V_0$ — удельный объем жидкости при давлении $p_0$; $\beta_ж$ — коэффициент сжимаемости жидкости.

При малых перепадах давления из (3.10) получаем

$$V = V_0 [1 - \beta_ж (p - p_0)]. \tag{3.11}$$

Зависимость удельного объема жидкости от температуры $T$ выражается аналогичными формулами:

$$V = V_0 \exp [\alpha_ж (T - T_0)] \tag{3.12}$$

и при малых $\Delta T = T - T_0$

$$V = V_0 [1 + \alpha_ж (T - T_0)], \tag{3.13}$$

где $V_0$ — удельный объем жидкости при $T = T_0$; $\alpha_ж$ — коэффициент термического расширения жидкостей.

Коэффициент $\alpha_ж$, например, для воды в интервале температур от 10° до 100° С равен $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/°С, а коэффициент $\beta_ж$ для воды равен примерно $10^{-9}$ 1/Па ($\sim 10^{-4}$ 1/(кгс/см$^2$).

Приведем теперь сведения о фазовом состоянии одно- и многокомпонентных веществ, полученные эмпирическим путем, на основе обобщения многочисленных экспериментальных данных [20]. Следует отметить, что в настоящее время известны многие расчетные методы определения фазовых состояний веществ, основанные на представлениях статистической физики и использующие соответствующие экспериментальные сведения.

Для того чтобы представить наглядно, как изменяется с изменением давления фазовое состояние вещества, состоящего из одного химического компонента, проследим за состоянием этого вещества, помещенного, например, в цилиндр с поршнем. Пусть одна грамм-молекула жидкости, например воды, находится в цилиндре под поршнем при температуре 20° С и давлении 760 мм рт. ст. Температура жидкости под поршнем остается постоянной. Если поршень выдвигать из цилиндра, то давление под поршнем будет уменьшаться. При этом жидкость будет испаряться и под поршнем в цилиндре образуется пар. При остановке поршня в каком-либо положении на достаточно продолжительное время давление пара стабилизируется. Это давление пара, находящегося в равновесии с жидкостью, называется упругостью пара. Для воды при температуре 20° С упругость пара равна 17,4 мм рт. ст. Будем считать пар воды идеальным газом и в соответствии с уравнением состояния идеального газа определим объем грамм-моля водяного пара при 20° С или 293,2 К и давлении, равном упругости водяного пара, т. е. 17,4 мм рт. ст. Этот объем составляет

$$V = \frac{RT}{p} = \frac{0{,}0821 \cdot 293{,}2}{0{,}023} = 1045 \text{ л}.$$

Следовательно, если первоначально под поршнем имелся один грамм-моль воды, т. е. количество воды массой 18 г, то, выдвигая постепенно поршень из цилиндра и сохраняя неизменной температуру, получим, что при достижении под поршнем объема, равного 1045 л, вся вода перейдет в газообразное состояние.

Упругость пара вещества заданного состава зависит только от температуры.

В табл. 2 приведены значения упругости пара воды и нормального гексана при различных температурах [20].

Таблица 2

| Температура, °С | Упругость пара, мм рт. ст. | |
|---|---|---|
| | вода | нормальный гексан |
| 0 | 4,58 | 45,4 |
| 20 | 17,54 | 120,0 |
| 40 | 55,3 | 276,7 |
| 60 | 149,4 | 566,2 |
| 80 | 355,1 | 1062,0 |
| 100 | 760,0 | 1836,0 |

Однако переход вещества в газообразное состояние может происходить также минуя жидкое состояние. Для того чтобы проследить за фазовыми превращениями вещества, рассмотрим диаграмму, показанную на рис. 28, характерную для многих однокомпонентных веществ. На этой диаграмме по оси абсцисс отложена температура $T$, а по оси ординат — давление $p$. Области диаграммы, расположенной под кривой $BOK$, соответствует газообразное состояние вещества, а области, расположенной над кривой $BO$ — твердое состояние. Если, например, вещество вначале находилось под поршнем в твердом состоянии (точка $D$ на рис. 28), то при сохранении постоянной температуры и уменьшении давления вещество может перейти в газообразное состояние (точка $D'$ на рис. 28). Точкам, расположенным на кривой $BO$, соответствует состояние, при котором могут сосуществовать твердая и газовая фазы.

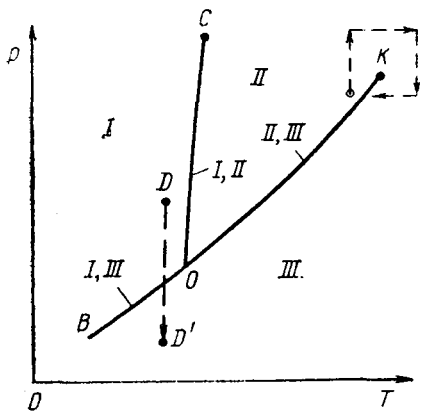



**Рис. 28. $pT$-диаграмма для однокомпонентного вещества:**

*I* — твердая фаза; *II* — жидкость; *III* — пар

Линия $OC$ диаграммы (см. рис. 28) разделяет области твердого состояния (область, расположенная слева от линии $BOC$) и жидкого состояния (область, ограниченная линией $COK$). Точкам, лежащим на линии $OC$, соответствует сосуществование твердой и жидкой фаз, а точкам, расположенным на кривой $OK$, — жидкой и газовой фаз. Линия $OC$ круто поднимается вверх. Это значит, что переход вещества из жидкого в твердое состояние происходит практи-

чески при постоянной температуре. Примечательно, что для воды линия $OC$ имеет отрицательный наклон, т. е. если, например, при некоторых температуре и давлении вода находилась в твердом состоянии в виде льда, то при повышении давления и постоянной температуре возможно плавление льда.

Совместное существование жидкой и газовой фаз вещества возможно не при любых значениях температуры и давления. Самые высокие давление и температура, при которых могут сосуществовать жидкая и газовая фазы, наблюдаются в точке $K$ на линии $OK$.

Температура и давление, соответствующие этой точке, являются критическими.

В области, находящейся выше горизонтали, выходящей из точки $K$, и справа от вертикали, проходящей через эту же точку, вещество находится в «закритическом» состоянии. Отметим, что можно перевести вещество из жидкого состояния в газообразное и наоборот, минуя процесс кипения. Для этого нужно изменять его параметры состояния в последовательности, соответствующей, например, пунктирным линиям, показанным на рис. 28 вокруг точки $K$.

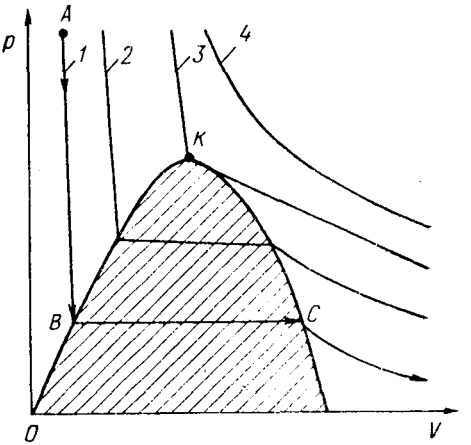



Рис. 29. $pV$-диаграмма для однокомпонентного вещества:
*1* — $T_1$; *2* — $T_2$; *3* — $T_3$; *4* — $T_4$

Фазовое состояние однокомпонентного вещества может быть выражено также на диаграмме давление $p$ — удельный объем $V$ (рис. 29). В качестве удельного объема можно выбрать весовой объем, т. е. например, объем 1 кг вещества, или мольный объем, т. е. объем 1 моля вещества. Каждой кривой состояния на этой диаграмме соответствует постоянная температура, так что эти кривые именуются изотермами. Проследим за изменением состояния вещества, двигаясь, например, по кривой *1* в направлении, указанном на рис. 29 стрелками. При высоком давлении (точка $A$) вещество при температуре $T_1$ находится в однофазном состоянии (жидком). Уменьшение давления приводит к увеличению удельного объема данного вещества, причем, поскольку жидкости являются часто слабосжимаемыми, изменение давления приводит к сравнительно небольшому изменению удельного объема. В точке $B$ будет наблюдаться выделение пара из жидкости. При дальнейшем увеличении объема количество пара будет увеличиваться и в точке $C$ вся жидкость перейдет в газообразное состояние. Точка $B$ называется точкой насыщения, а точка $C$ — точкой росы.

При переходе однокомпонентного вещества из жидкого в газообразное состояние давление не изменяется в случае постоянной температуры. Это давление, как указывалось выше, называется упругостью пара. Двухфазное состояние вещества может существовать лишь при значениях $p$ и $V$, расположенных в заштрихованной области на рис. 29.

Точка $K$, к которой касается предельная изотерма $T_3$, является критической. Изотермы, не пересекающие заштрихованную область, находятся в закритической области, где вещество может быть лишь в однофазном состоянии.

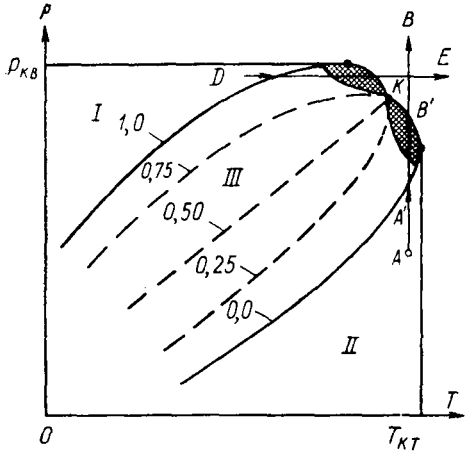



**Рис. 30.** *pT*-диаграмма для двухкомпонентного вещества:

*I* — жидкость; *II* — газ; *III* — двухфазная область

Выше рассматривались в основном жидкое и газообразное состояния веществ. В подземных условиях углеводороды могут переходить в твердое состояние при изменении термодинамических условий. Одним из примеров образования твердого вещества в пласте является выпадение парафина из пластовой нефти.

Рассмотрим теперь двухфазную смесь как физическую (термодинамическую) систему, состоящую из жидкости и газа и содержащую несколько компонентов. Эта система будет считаться находящейся в равновесном состоянии, когда количества компонентов, переходящих в каждый момент времени из жидкой фазы в газовую и наоборот, равны между собой, так что компонентные составы жидкой и газовой фаз остаются неизменными. Равновесные системы существуют при постоянном значении давления и температуры.

Типичная *pT*-диаграмма для системы, состоящей из двух веществ-компонентов, показана на рис. 30. В этой системе каждый компонент содержится, конечно, в строго определенной весовой пропорции.

Вместо одной линии, разделяющей жидкую и газовую фазы в случае однокомпонентного вещества, на *pT*-диаграмме для двухкомпонентной системы существует область двухфазного состояния. Переход из жидкой фазы в газовую и наоборот происходит не при одном и том же значении давления или температуры, как в случае однокомпонентного вещества, а при изменении этих параметров.

Точка $K$ на диаграмме рис. 30 является критической. Пунктирные кривые внутри области двухфазного состояния соответствуют различному содержанию жидкой фазы в системе, выражаемому в долях единицы по объему или весу. Интересно, что двухкомпонентная система может существовать в двухфазном состоянии при давле-

ниях и температурах, превышающих критические. Наибольшее давление $p_{кв}$ (см. рис. 30), при котором эта система может находиться в двухфазном состоянии, называется криконденбар, а наибольшая температура, возможная при двухфазном состоянии, называется криконденterм ($T_{кт}$).

$pV$-диаграмма для двухкомпонентной системы показана на рис. 31. В отличие от аналогичной диаграммы для однокомпонентного вещества изотермы, находящиеся в двухфазной области, имеют наклон, вызванный уже упомянутым выше явлением — изменением давления при переходе от жидкого к газообразному состоянию. Это явление физически вполне понятно. В самом деле, из двух компонентов, составляющих систему, один более летучий, чем другой. Поэтому при достижении точки росы появляется жидкая фаза, в которой преобладает менее летучий компонент. Для того чтобы превратить в жидкость часть вещества системы, оставшуюся в газовой фазе, которая теперь содержит больше летучего компонента, чем прежде, нужно увеличить давление. Поэтому изотермы двухкомпонентного вещества в двухфазной области имеют наклон.

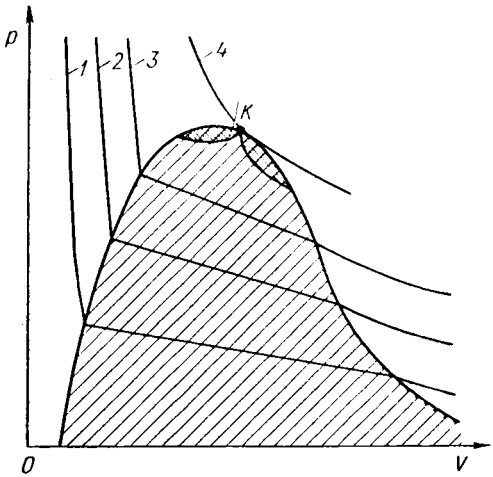



Рис. 31. $pV$-диаграмма для двухкомпонентного вещества:

*1* — $T_1$; *2* — $T_2$; *3* — $T_3$; *4* — $T_4$; *K* — критическая точка

Двухкомпонентная система в отличие от однокомпонентного вещества обладает еще одной особенностью. Если рассматривать $pT$-диаграмму (см. рис. 30), то обращает на себя внимание следующий факт. Предположим, что изменяют состояние двухкомпонентной системы, двигаясь снизу вверх по линии $AB$. До пересечения с нижней граничной кривой двухфазного состояния (при подходе к точке $A'$) система находится в газообразном состоянии. На участке $A'B'$ вертикаль $A'B'$ будет сначала пересекаться с пунктирными линиями, соответствующими малому содержанию жидкой фазы (цифрами на рис. 30 обозначено содержание жидкой фазы в двухфазной системе). Затем содержание жидкости в двухфазной системе будет увеличиваться и, наконец, достигнув максимума, станет уменьшаться, а миновав точку $B'$, система снова перейдет в газообразное состояние.

В случае однокомпонентного вещества, находящегося при определенном постоянном значении температуры, повышение давления должно вызывать лишь его переход в жидкое состояние. В двухком-

понентной же системе при изменении ее $pVT$-состояния в заштрихованной области на $pT$-диаграмме, как это показано выше, наблюдаются и обратные явления. Так, при изотермическом снижении давления (при движении вниз по линии $A'B'$) наблюдается увеличение жидкой фазы. То же самое будет наблюдаться при изобарическом ($p$ = const) повышении температуры. При движении по линии, например, $DE$ количество жидкой фазы в системе может на некотором участке заштрихованной области не уменьшаться, как это следует из аналогии с однокомпонентным веществом, а увеличиваться.

Описанные выше явления называются ретроградными, т. е. соответственно изотермической и изобарической ретроградной конденсацией или испарением. Эти явления наблюдаются при изменениях состояния систем, соответствующих заштрихованным областям $pT$-диаграммы. На $pV$-диаграмме эти области также показаны штриховкой.

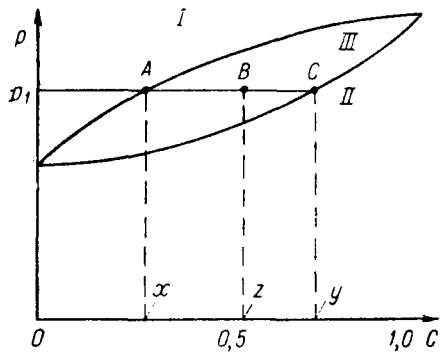



**Рис. 32.** $pC$-диаграмма для двухкомпонентного вещества:
*I* — жидкость; *II* — газ; *III* — область двухфазного состояния

Ретроградные явления свойственны не только двухкомпонентным, но и многокомпонентным системам.

Приведенные выше $pV$- и $pT$-диаграммы описывают состояние двухкомпонентных систем, имеющих лишь определенное содержание одного и другого однокомпонентного вещества в системе в целом. Поэтому при каждом изменении состава системы в целом требуется применение новой диаграммы.

Иным способом изображения состояния двухкомпонентных систем различного состава является использование диаграмм давление $p$ — состав $C$ (т. е. $pC$-диаграмм). Одна из таких диаграмм показана на рис. 32. Диаграммы с использованием в качестве переменной состава $C$ системы применяются и для описания состояния трехкомпонентных систем.

Необходимость использования $pC$-диаграмм вызывается еще и следующим обстоятельством. Как на $pT$-, так и на $pV$-диаграммах нельзя изображать составы газовой и жидкой фаз двухкомпонентной системы, что бывает необходимо при ряде расчетов. Использование же $pC$-диаграммы позволяет это сделать.

Нижняя кривая на $pC$-диаграмме является кривой точек росы, а верхняя — кривой насыщения.

На $pC$-диаграмме можно не только отражать фазовое состояние двухкомпонентной системы, что позволяет узнать, находится ли она в одно- или двухфазном состоянии, но и определять, сколько весовых или молярных долей вещества приходится на жидкую

и газовую фазы и каков состав фаз в количественном отношении. Однако каждую $pC$-диаграмму можно использовать для определенного значения температуры $T$.

Рассмотрим более подробно особенности $pC$-диаграммы. Пусть на $pC$-диаграмме (см. рис. 32), построенной для определенного значения температуры $T = \text{const}$, задан точкой $B$ состав двухкомпонентной смеси. Для определения состава двухкомпонентной смеси, очевидно, достаточно задать весовое или молярное содержание одного из компонентов в смеси (например, как это сделано на диаграмме рис. 32, молярную долю $z$ более летучего компонента, соответствующую точке $B$). Если состав некоторой двухфазной системы находится на $pC$-диаграмме на прямой $AC$ в очень близкой окрестности точки $C$, то эта система состоит в основном из газовой фазы и имеет лишь каплю жидкости. Для систем, содержащих достаточно большое число молекул как в жидкой, так и в газовой фазах, можно считать, что состав жидкой и газовой фаз практически не изменяется при изменении общего количества вещества в каждой из фаз.

Если постепенно удалять из системы газовую фазу и сохранять неизменными давление и температуру, то содержание в системе более летучего компонента будет уменьшаться практически пропорционально уменьшению количества газовой фазы.

Выведем теперь формулу, определяющую содержание фаз в двухкомпонентной системе. Итак, пусть в двухкомпонентной системе содержится $n$ молей вещества, из которых в жидкости находится $n_l$ молей, а в газе $n_g$ молей вещества. Если говорится, что в системе находится $n$ молей вещества, то под этим понимается общее число молей различных компонентов. Например, 3 моля вещества могут быть составлены из 2 молей метана и одного моля пропана, 1,5 моля пропана и 1,5 моля этана и т. д. Имеем, очевидно, $n = n_l + n_g$. Рассматривая баланс более летучего компонента в системе, получаем $n_l x + n_g y = nz$ (см. рис. 32). Из этого и предыдущего соотношений получаем

$$\frac{n_l}{n_g} = \frac{z - x}{y - z}. \tag{3.14}$$

Таким образом, если на $pC$-диаграмме заданы давление $p_1$ и общий состав двухкомпонентной смеси (точка $z$), то, проведя горизонталь через точку $p_1$ и восстановив перпендикуляр из точки $z$, легко находим точки $A$, $B$ и $C$ и определяем составы жидкой и газовой фаз (соответственно точки $x$ и $y$ на оси абсцисс). Количества жидкой и газовой фаз определяются по формуле (3.14).

Рассмотрим теперь трехкомпонентную систему. Возьмем для этой системы $pC$-диаграмму, справедливую, естественно, при определенном значении температуры $T = \text{const}$.

Для описания фазового состояния трехкомпонентных систем используют треугольные диаграммы. Одна из таких диаграмм показана на рис. 33 для системы, состоящей из компонентов $A_1$, $A_2$ и $A_3$. При этом точке $A_1$ диаграммы соответствует доля компонента

$A_1$ в системе, равная единице. В точках $A_2$ и $A_3$ и на прямой, соединяющей эти точки, содержание компонента $A_1$ в системе равно нулю. В точке $A_2$ содержание компонента $A_2$ равно единице, а в точках $A_1$ и $A_3$ и на прямой, соединяющей эти точки, содержание компонента $A_2$ равно нулю. Те же рассуждения справедливы и для точки $A_3$ и соответственно для точек $A_1$ и $A_2$ и соединяющей их прямой.

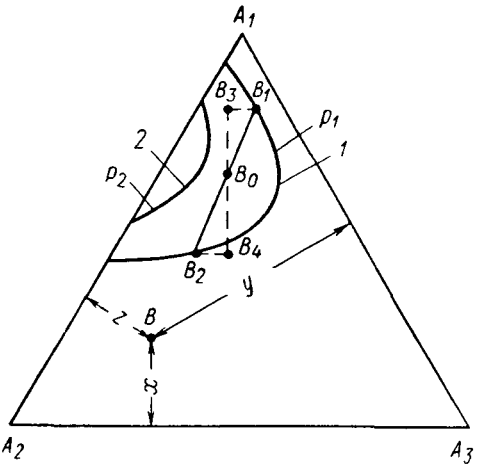



Рис. 33. $pC$-диаграмма для трехкомпонентного вещества

Пусть состав трехкомпонентной смеси характеризуется точкой $B$ на диаграмме (см. рис. 33). Содержание компонента $A_1$ в этой смеси определяется отрезком $x$, содержание компонента $A_2$ — отрезком $y$, а содержание компонента $A_3$ — отрезком $z$.

При давлении $p_1$ вся область, лежащая между кривой *1* и прямой $A_1A_2$, является областью двухфазного состояния. Остальная часть диаграммы, находящаяся вне этой области, соответствует однофазному состоянию системы.

При давлении $p_2 > p_1$ область двухфазного состояния заключена между кривой *2* и линией $A_1A_3$.

Пусть теперь состав трехкомпонентной системы характеризуется точкой $B_0$, находящейся внутри области двухфазного состояния. Составу жидкой фазы в этой системе будут соответствовать значения долей компонентов $A_1$, $A_2$ и $A_3$, равные $x_0$, $y_0$ и $z_0$. Пусть давление в системе равно $p_1$, а температура $T_1$. Область двухфазного состояния находится слева от кривой *1*. Компонентный состав газовой фазы характеризуется координатами $x_1$, $y_1$, $z_1$ (точка $B_1$), а компонентному составу жидкой фазы соответствует точка $B_2$ с координатами $x_2$, $y_2$ и $z_2$.

Обозначим $n_1$, $n_2$ и $n_3$ весовое или мольное содержание в системе компонентов 1, 2 и 3, $n_g$ и $n_l$ — весовой или мольный состав газовой и жидкой фаз. Из условия материального баланса имеем

$$\left.\begin{aligned} n_g^1 + n_g^2 + n_g^3 &= n_g; \\ n_l^1 + n_l^2 + n_l^3 &= n_l; \\ n_g^1 + n_l^1 = n_1; \quad n_g^2 + n_l^2 &= n_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ n_g^1 = x_1 n_g; \quad n_l^1 &= x_2 n_l; \end{aligned}\right\} \qquad (3.15)$$

$$\left.\begin{array}{c} x_1+y_1+z_1=1; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_l+n_g=n; \quad \dfrac{n_1}{n}=x_0; \quad \dfrac{n_2}{n}=y_0; \quad \dfrac{n_3}{n}=z_0. \end{array}\right|$$

Отсюда, например, получаем

$$x_1 n_g + x_1 n_l = n_1 \quad \text{или} \quad x_1 \frac{n_g}{n} + x_2 \frac{n_l}{n} = x_0,$$

откуда

$$\frac{n_l}{n} = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2}. \tag{3.16}$$

Используя дальше соотношения (3.15) и (3.16), имеем

$$\frac{n_l}{n_g} = \frac{x_1 - x_0}{x_0 - x_2}. \tag{3.17}$$

Из трехфазной диаграммы рис. 33 видно, что

$$\frac{x_1 - x_0}{x_0 - x_2} = \frac{B_0B_3}{B_0B_4}.$$

На основании же подобия треугольников $B_3B_1B_0$ и $B_0B_4B_2$ получаем

$$\frac{n_l}{n_g} = \frac{B_0B_1}{B_0B_2}. \tag{3.18}$$

Таким образом, соотношение жидкой и газовой фаз оказывается равным отношению отрезков прямой, которая соединяет точки $B_1$ и $B_2$, характеризующие составы жидкой и газовой фаз, и проходит через точку $B_0$, характеризующую общий состав системы. Кроме (3.17), можно получить еще два аналогичных соотношения. Из формулы (3.17) вытекает важное следствие. Если оставить неизменными составы газовой и жидкой фаз, т. е. величины $x_1$, $y_1$, $z_1$ и $x_2$, $y_2$, $z_2$, а изменять только $x_0$, $y_0$, $z_0$, т. е. общий состав смеси в таких пределах, чтобы точка $B_0$ находилась в двухфазной области, то это приведет к изменению соотношения жидкой и газовой фаз. Наоборот, если из системы отбирать жидкую или газовую фазу, то ее равновесие не изменится, а будет меняться лишь общий состав системы.

## § 4. КАПИЛЛЯРНЫЕ СИЛЫ

Молекулярные силы взаимодействия между различными веществами, насыщающими горные породы, играют важную роль в процессах извлечения нефти и газа из недр. Капиллярные силы представляют собой одну из форм проявления межмолекулярных сил.

Характер молекулярного взаимодействия зависит от природы вещества. При нормальных расстояниях между молекулами вещества (при нормальных давлении и температуре) взаимодействие молекул выражается в притяжении их друг к другу. При сильном сближении молекул возникают силы отталкивания.

Сила взаимодействия молекул $F_0$ сильно зависит от расстояния $r$ между молекулами при малых $r$.

Функция $F_0(r)$ для простых молекул, имеющих сферическую форму, имеет вид, показанный на рис. 34.

Представим себе две жидкости $A$ и $B$, настолько диспергированные одна в другой, что их молекулы равномерно распределены в объеме, который занимают эти жидкости.

Пусть молекулы жидкости $B$ сильнее притягиваются к молекулам жидкости $A$, чем между собой. Тогда любое случайное скопление молекул $B$ (рис. 35) окажется недолговечным — молекулы жидкости $A$ «растащат» молекулы жидкости $B$. Жидкость $B$ является в данном случае полностью растворимой в жидкости $A$.

Если же взаимное притяжение молекул жидкости $B$ намного больше притяжения молекул жидкости $B$ к молекулам жидкости $A$

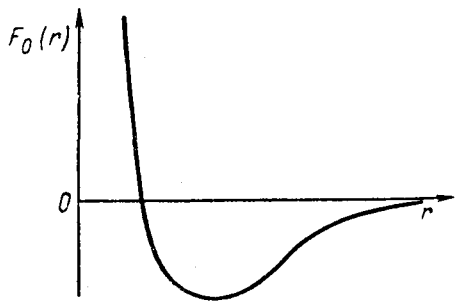



Рис. 34. Зависимость $F_0(r)$

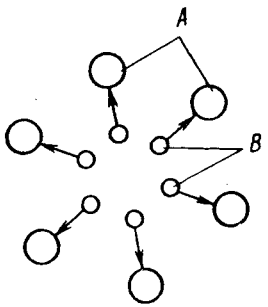



Рис. 35. Взаимное притяжение молекул $A$ и $B$

или если между этими разносортными молекулами существуют силы отталкивания, то скопление молекул жидкости $B$, находящихся в жидкости $A$, будет устойчивым. Такие жидкости называются взаимно нерастворимыми или несмешивающимися. Следовательно, характер взаимодействия молекул различных веществ определяет их взаимную растворимость.

Рассмотрим схематично молекулы двух взаимно нерастворимых веществ, находящихся в соприкосновении друг с другом (рис. 36).

Будем считать, что молекулы жидкостей $A$ и $B$ испытывают взаимное отталкивание, причем силы отталкивания действуют в направлении, перпендикулярном поверхности раздела жидкостей. Молекулы $A$ и $B$ испытывают также притяжение в сторону той жидкости, которой они принадлежат. Допустим теперь, что молекулы жидкости $B$, находившиеся первоначально в сильно диспергированном состоянии в жидкости $A$, собрались в одну каплю. В том случае, когда молекулы жидкости $B$ были сильно диспергированы в жидкости $A$, они обладали большей потенциальной энергией, чем когда собрались в каплю. Чтобы диспергировать жидкость $B$ в жидкости $A$, нужно затратить дополнительную работу. Если не

прилагать к системе, состоящей из жидкости $A$ с диспергированной в ней жидкостью $B$, никакой дополнительной энергии, то молекулы жидкости $B$ будут уменьшать свою потенциальную энергию, сливаясь в более крупные скопления. В конце концов жидкость $B$ соединится в одну каплю. Эта капля будет иметь форму шара, если пренебрегать действием силы тяжести, поскольку потенциальная энергия молекул жидкости $B$ в данном случае примет наименьшее значение. Следует заметить, что самопроизвольное соединение капель жидкости $B$ будет происходить не во всех случаях. Если, например, на внешней оболочке капель присутствуют вещества, вызывающие отталкивание капель, то это будет приводить к образованию стойкой эмульсии жидкости $B$ в жидкости $A$.

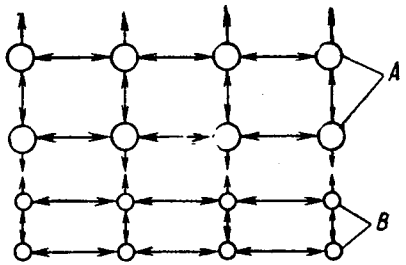



Рис. 36. Контакт слоев молекул $A$ и $B$

Итак, молекулы жидкости $B$, находящиеся на границе с жидкостью $A$, будут испытывать отталкивание от молекул жидкости $A$ и притяжение со стороны молекул жидкости $B$ (см. рис. 36). Таким образом, возникнет состояние, аналогичное тому, как будто бы капля жидкости $B$ сжимается упругой оболочкой. В результате давление внутри капли не будет равно давлению в жидкости $A$, окружающей каплю.

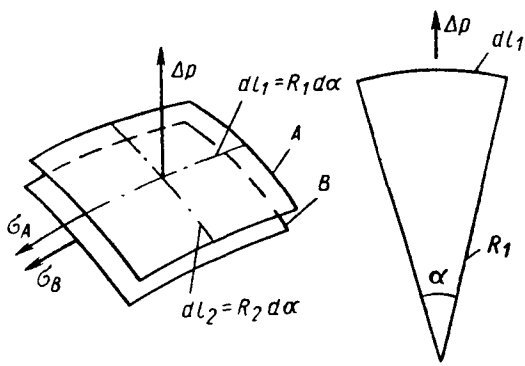



Рис. 37. Действие усилий на элемент поверхности раздела жидкостей $A$ и $B$

Рассматривая поверхностные силы, действующие на границе раздела двух жидкостей в капле, содержащей большее число молекул, можно уже не учитывать взаимодействие отдельных молекул, а перейти к использованию понятий, свойственных механике сплошных сред. Учитывая это, рассмотрим участок поверхностей, разделяющих две жидкости в капле (рис. 37).

Верхний элемент поверхности относится к жидкости $A$, а нижний — к жидкости $B$; $dl_1$ и $dl_2$ — длины дуг поверхности, имеющие радиусы $R_1$ и $R_2$, а $\alpha$ — угол между соответствующими направлениями радиуса. Из равновесия этого участка поверхностей вытекает, что к единице длины сечения внешней оболочки капли должны быть приложена сила $\sigma_A$, а к внутренней оболочке — сила $\sigma_B$.

Условие равновесия поверхностей раздела двух жидкостей выражается формулой Лапласа

$$\Delta p = p_B - p_A = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \tag{4.1}$$

где $\sigma = \sigma_A + \sigma_B$.

Величина $\sigma$ называется поверхностным натяжением на границе раздела двух жидкостей. Поверхностное натяжение имеет размерность силы, отнесенной к расстоянию. Его можно определить также как энергию, приходящуюся на единицу поверхности раздела между двумя жидкостями.

Если капля жидкости $B$ имеет форму шара, то $R_1 = R_2$, и из формулы (4.1) получаем формулу Кельвина

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \tag{4.2}$$

Поверхностное натяжение является свойством не отдельно взятого вещества, а свойством поверхности контакта двух или большего числа веществ. Можно говорить, например, о поверхностном натяжении воды на границе с воздухом или на границе с нефтью, однако без указания контактирующего с водой вещества понятие поверхностного натяжения теряет смысл. Одно и то же вещество может иметь различные величины поверхностного натяжения на границе с различными веществами. Так, вода на границе с воздухом имеет поверхностное натяжение $75 \cdot 10^{-3}$ Н/м, а на границе с нефтью — около $30 \cdot 10^{-3}$ Н/м.

Взаимно не растворимые вещества, насыщающие пласт, могут одновременно контактировать с твердой поверхностью пористой среды. Одно из веществ может лучше смачивать твердую поверхность пористой среды, чем другое. Тогда поверхность раздела между этими веществами будет искривленной, т. е. будет существовать мениск между веществами. Если в пласте содержатся одновременно нефть и вода, и вода лучше смачивает твердую поверхность пористой среды, чем нефть, то такая пористая среда является гидрофильной. Если же поверхность среды лучше смачивается нефтью, чем водой, то пористая среда гидрофобная. Угол, который составляет поверхность раздела вода — нефть с твердой поверхностью, называется краевым углом смачивания. Если, например, в водной среде имеется капля нефти, прилипшая к твердой поверхности, то в случае гидрофильной твердой поверхности краевой угол смачивания будет меньше 90°, а в случае гидрофобной — больше 90°. Точный расчет формы поверхности раздела между несмешивающимися фазами, находящимися в статических условиях, и распределения в них давления возможен на основе уравнений капиллярно-гидростатического равновесия фаз [70]. Однако такой расчет целесообразен лишь для наиболее простых случаев. В реальных же пористых средах ввиду сложности их структуры детальное вычисление формы поверхности раздела фаз оказывается практически невозможным. В качестве

капиллярных характеристик реальных пористых сред используют интегральные характеристики, получаемые экспериментальным путем, о которых будет сказано ниже.

В качестве одного из простых примеров капиллярно-гидростатического равновесия рассмотрим равновесие жидкости, заключенной между двумя параллельными пластинками (рис. 38). Пластинки имеют достаточно большое простирание в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Нижний конец пластинок погружен в жидкость $B$, смачивающую материал пластинок, а над жидкостью $B$ находится газ $A$. Иными словами, к молекулам материала пластинок сильнее притягиваются молекулы жидкости $B$, чем молекулы газа $A$, находящегося над жидкостью $B$. Давление в газе всегда постоянно и равно $p_A$.

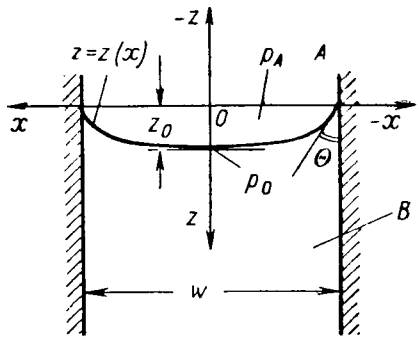



Рис. 38. Капиллярно-гидростатическое равновесие жидкости между двумя параллельными поверхностями

Рассматриваемый случай капиллярно-гидростатического равновесия может иметь место в трещиноватых породах на границе нефть — газ. Обобщая формулу Лапласа и полагая для щели $R_1 = R$, $R_2 \to \infty$, получаем

$$\Delta p = \frac{\sigma}{R}. \tag{4.3}$$

Из дифференциальной геометрии для радиуса кривизны поверхности $z = z(x)$ имеем следующее выражение:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2z}{dx^2}\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{-3/2}. \tag{4.4}$$

Согласно рис. 38, при $x > 0$ производная $\frac{dz}{dx}$ отрицательна, вторая производная $d^2z/dx^2$ положительна, а при $x < 0$ $(dz/dx)$ положительна, но $d^2z/dx^2$ отрицательна.

Учитывая это обстоятельство, а также подставляя (4.4) в (4.3), получаем дифференциальное уравнение поверхности раздела жидкости $B$ и газа $A$ в виде:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{\Delta p_0 - \rho g z}{\sigma}\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = 0; \tag{4.5}$$

$$\Delta p_0 = p_A - p_0 + \rho g z_0,$$

где $\rho$ — плотность жидкости $B$; $g$ — ускорение свободного падения; величины $p_0$ и $z_0$ показаны на рис. 38.

Интегрирование (4.5) дает

$$\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{-1/2}=\frac{z}{\sigma}\left(\Delta p_0-\frac{\rho g z}{2}\right)+C. \tag{4.6}$$

Для определения постоянной $C$ используем согласно рис. 38 условия

$$-\frac{dz}{dx}=\operatorname{ctg}\Theta, \quad z=0 \text{ при } x=0. \tag{4.7}$$

Угол $\Theta$ является краевым углом смачивания.

Имеем $C=\sin\Theta$. Для определения $z_0$ используем квадратное уравнение

$$\frac{\rho g z_0^2}{2\sigma}-\frac{\Delta p_0}{\sigma}z_0+1-\sin\Theta=0. \tag{4.8}$$

Решая уравнение (4.6), получаем

$$-\int\frac{dz}{\left\{\left[\frac{z}{\sigma}\left(\Delta p_0-\frac{\rho g z}{2}\right)+\sin\Theta\right]^{-2}-1\right\}^{1/2}}=x+C_1, \tag{4.9}$$

где $C_1$ — постоянная интегрирования.

Рассмотрим предельный случай, когда $\Delta p_0 >> \rho g z_0$. Получаем $\Delta p_0 \approx p_A - p_0$. Из (4.8) имеем $\frac{\Delta p_0 z_0}{\sigma}=1-\sin\Theta$ и из (4.9)

$$-\int\frac{\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2}}=\frac{\Delta p_0}{\sigma}(x+C_1). \tag{4.10}$$

Используя условие $z=0$ при $x=\frac{w}{2}$ и $z=z_0$ при $x=0$, получаем формулу для разности давлений в жидкости $B$ и газе $A$:

$$p_A-p_0\approx\Delta p_0=\frac{2\sigma\cos\Theta}{w}. \tag{4.11}$$

Такой же вид имеет известная формула для перепада давлений в капилляре круглого сечения радиусом $r$:

$$\Delta p=\frac{2\sigma\cos\Theta}{r}. \tag{4.12}$$

Разность давлений между несмешивающимися фазами, насыщающими пористые среды, определяется комплексом $\sigma\cos\Theta/\bar{r}$ ($\bar{r}$ — средний радиус пор, занятых соответствующей фазой). Чем меньше $\bar{r}$, тем больше капиллярное давление. Эксперименты показывают что в гидрофильной пористой среде, содержащей две фазы — нефть и воду, разность между давлениями в воде и в нефти (капиллярное давление) увеличивается с уменьшением насыщенности пористой среды водой. Это объясняется тем, что вода вначале проникает в мелкие поры, так что при малой водонасыщенности пористой среды $\bar{r}$ мало. По мере увеличения водонасыщенности $\bar{r}$ увеличивается,

и капиллярное давление уменьшается. Зависимость капиллярного давления от насыщенности является одной из важных интегральных характеристик капиллярных явлений в пористых средах.

Если гидрофильная пористая среда, насыщенная нефтью, будет находиться в контакте с водой, то под действием капиллярного давления вода начнет впитываться в пористую среду, вытесняя из нее нефть. Это явление называется капиллярной пропиткой. Скорость капиллярной пропитки, которую можно считать зависящей от водонасыщенности пористой среды, также является важной интегральной капиллярной характеристикой пористой среды.

Поверхностное натяжение и краевой угол смачивания могут существенно измениться, если в контактирующих фазах появятся вещества, молекулы которых имеют такое строение, что одна часть молекулы притягивается к одной, а другая часть — к другой фазе. Такие вещества адсорбируются на поверхности раздела фаз и существенно снижают поверхностное натяжение на границе фаз. Эти вещества называются поверхностно-активными (ПАВ). Так, если в нефти, контактирующей со щелочной водой, имеются нафтеновые кислоты, которые, вступая в реакцию со щелочами вод, образуют ПАВ, то поверхностное натяжение воды на границе с нефтью может снизиться с десятков дин/см до единиц или долей единицы дин/см [114]. При введении в воду или в нефть ПАВ поверхностное натяжение на границе фаз также может существенно измениться.

Следует отметить, что ПАВ, уменьшая поверхностное натяжение на границе несмешивающихся фаз, непременно должны адсорбироваться на поверхности раздела фаз или на поверхности раздела фаз с твердым телом и таким образом содержание их в растворе должно уменьшаться. Следовательно, поверхностное действие ПАВ и их адсорбция представляют собой взаимосвязанные и не отделимые друг от друга явления.

## ГЛАВА III

# ПОДЗЕМНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

### § 1. ОСНОВНОЙ ЗАКОН КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

Характер подземного движения жидкостей и газов определяется их свойствами, состоянием и скоростью, а также свойствами и состоянием горных пород, в пустотах которых перемещаются жидкости и газы. Если вмещающее пространство пород представляет собой поры, заключенные между зернами пород и связующим зерна материалом, то движение в них жидкостей и газов называется фильтрацией.

Помимо фильтрационного движения, жидкости и газы могут перемещаться под землей по трещинам в горных породах, кавернам, течь по карстовым каналам и т. д.

Фильтрацию вязкой жидкости вообще можно рассматривать как один из случаев движения вязкой жидкости, описываемого уравнениями Навье — Стокса. Фильтрацию газа также можно считать одним из частных случаев движения сжимаемой жидкости. Однако сложность структур реальных пористых сред и вытекающая отсюда сложность гидромеханических задач делают изучение фильтрации на основе общей гидромеханики практически невозможным. Вместе с тем в подавляющем большинстве инженерных приложений и не требуется знать истинное поле скоростей веществ и поле давлений в поровом пространстве. На практике чаще всего нужно знать связь между общим количеством вещества, протекающего через единицу поверхности пористой среды в единицу времени (расходом вещества), и градиентом давления в пористой среде. Эта связь впервые была получена французским инженером Анри Дарси в 1856 г.

Лишь впоследствии, в связи с изучением конвективной внутрипоровой диффузии [122], появилась необходимость рассмотрения истинных скоростей жидкости в пористой среде.

Рассматривая движение воды в фильтрах водоочистных сооружений, Дарси нашел зависимость между расходом воды $q$, протекающей через вертикально расположенную трубу, набитую песком, и гидростатическим напором $p = \rho g h$ ($\rho$ — плотность воды; $g$ — ускоре-

ние свободного падения; $h$ — высота трубы). Эта зависимость выражается формулой

$$q = K_\Phi S \rho g = K_\Phi S \frac{p}{h}, \tag{1.1}$$

где $S$ — площадь поперечного сечения трубы; $K_\Phi$ — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом фильтрации.

В результате классических работ Н. Е. Жуковского, Н. Н. Павловского, Слихтера, Терцаги, Л. С. Лейбензона, Козени и др. зависимость (1.1) была обобщена и преобразована в закон фильтрации, записываемый в дифференциальной форме следующим образом:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p. \tag{1.2}$$

Этот закон, именуемый законом Дарси, и используется в настоящее время для описания движения однородной жидкости или газа в изотропной пористой среде. В (1.2) $\vec{v}$ является вектором скорости фильтрации. Модуль вектора скорости фильтрации равен расходу, отнесенному к единице площади пористой среды. Закон Дарси (1.2) написан для избыточного давления $p$. Коэффициент $k$ является коэффициентом проницаемости (проницаемостью) пористой среды. Проницаемость выражается в дарси (Д), 1 Д $= 10^{-8}$ см$^2$. В формуле (1.2) $\mu$ — вязкость жидкости или газа. Если учитывать полный напор жидкости или газа плотностью $\rho$, то закон Дарси примет следующий вид:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} (p + \rho g z). \tag{1.3}$$

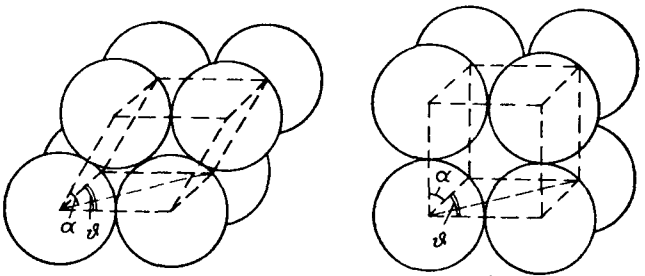
В формуле (1.3) $z$ — вертикальная координата.

В идеальном случае проницаемость должна зависеть только от геометрических характеристик пористой среды. Поэтому многим исследователям представлялось весьма заманчивым найти общую взаимосвязь между пористостью пород и их проницаемостью — двумя наиболее важными для описания фильтрации геометрическими характеристиками пористой среды. Эту взаимосвязь можно было найти путем построения моделей пористых сред. Подробный анализ моделей пористых сред читатель может найти в трудах Л. С. Лейбензона [65, 66], монографиях и руководствах по физике пласта, подземной гидродинамике и физике пористых сред [6, 31, 40, 57, 73, 74, 95]. Здесь же укажем две наиболее простые модели пористых сред. Самой простой моделью пористой среды является, по-видимому, модель, состоящая из набора параллельных цилиндрических трубок одинакового диаметра $d$. Эта модель называется идеальным грунтом. Течение жидкости в трубках, если оно ламинарное, определяется по формуле Пуазейля. Отсюда нетрудно найти выражение для проницаемости идеального грунта. Можно ввести также понятие извилистости идеального грунта $J$, равной отношению суммарной длины всех $n$ искривленных трубок, находящихся в некотором достаточно

большом объеме идеального грунта. Если сравнить выражение для расхода жидкости, проходящей через идеальный грунт, определенное в соответствии с формулой Пуазейля, с выражением, рассчитанным на основе закона Дарси, то получим следующую зависимость между проницаемостью идеального грунта $k_{id}$, диаметром трубок $d_{id}$, пористостью идеального грунта $m_{id}$ и извилистостью $J$:

$$k_{id} = \frac{d_{id}^2 m_{id}}{32J}. \tag{1.4}$$

Простой является также модель пористой среды, составленная из твердых шаров одинакового диаметра. Эта модель называется фиктивным грунтом. Пористость такой среды зависит от укладки шаров.




*а* *б*

Рис. 39. Укладки шаров

Рассмотрим элемент фиктивного грунта, состоящий из четырех шаров. Центры шаров образуют ромбоэдр (рис. 39), основание которого, представляя собой ромб, имеет площадь $d_f^2 \sin \vartheta$ ($d_f$ — диаметр шара). Высота ромбоэдра $h = d_f \sin \alpha$. Таким образом, объем ромбоэдра $V = d_f^3 \sin \vartheta \sin \alpha$. В ромбоэдре помещаются восемь частей шара, составляющих вместе один шар. Следовательно, пористость $m_f$ элемента ромбоэдра выражается формулой

$$m_f = \frac{V - \frac{\pi d_f^3}{6}}{V} = 1 - \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sin \alpha \sin \vartheta}. \tag{1.5}$$

При самой тесной упаковке (рис. 39, *а*) $\alpha = \vartheta = 60°$. В этом случае из (1.5) имеем $m_f \approx 0{,}3$. При наиболее неплотной укладке (рис. 39, *б*), но при условии касания шаров друг друга $\alpha = \vartheta = 90°$. Тогда на основе (1.5) получаем $m_f = 0{,}476$.

Закон движения вязкой жидкости в фиктивном грунте трудно получить, строго исходя из уравнений гидродинамики вязкой жидкости, ввиду сложности их интегрирования в рассматриваемом случае. Приближенное решение этой задачи было найдено Слихтером [66]. Задача о течении жидкости в фиктивном грунте была сведена Слихтером к задаче о ламинарном движении вязкой жидкости в трубах треугольного сечения, поскольку им было принято, что при плот-

ной упаковке шаров просветы между ними представляют собой криволинейные треугольники. Считалось также, что в областях этих треугольников, примыкающих к их вершинам, существует «мертвая» зона, где движения жидкости не происходит. Слихтер определил площадь осредненного («эффективного») сечения треугольной призмы и ее длину, выразив эти параметры через диаметр шаров.

Таким образом, Слихтер свел задачу о движении жидкости в фиктивном грунте к задаче о движении жидкости в идеальном грунте с трубками треугольного сечения.

Зная параметры идеального грунта, эквивалентного фиктивному, очень просто найти все гидродинамические характеристики фильтрации в фиктивном грунте.

Иной способ перехода от фиктивного грунта к идеальному был предложен Козени [66]. Предположение, положенное в основу этого способа, состоит в приравнивании емкостей и площадей смачиваемых поверхностей фиктивного и идеального грунтов.

Козени был найден гидравлический радиус идеального грунта, эквивалентного фиктивному. После этого также нетрудно определить гидродинамические характеристики фильтрации в фиктивном грунте.

Помимо описанных выше способов перехода от фиктивного грунта к идеальному, были предложены многие другие способы, описание которых можно найти в литературе. Однако реальные пористые среды существенно отличаются от фиктивного грунта. Усилия многих исследователей были направлены на то, чтобы найти переход от реальных пористых сред к фиктивному грунту. Многие способы сводятся к нахождению среднего (эффективного) диаметра реальной пористой среды, состоящей из зерен разного размера, и приравниванию этого эффективного диаметра диаметру шаров фиктивного грунта.

Представления об идеальном и фиктивном грунтах применяются для иллюстрации закономерностей, характерных для пористых сред. Используя эти представления, можно делать оценочные расчеты тех или иных процессов, происходящих в пористых средах.

Конечно, в идеальном и фиктивном грунтах не учитываются многие особенности строения реальных пористых пород — форма зерен, их шероховатость, наличие тупиковых пор и т. д. Исследованиями Ф. А. Требина [110] было показано, что проницаемость пористых сред нефтегазоносных коллекторов может зависеть также от физико-химических факторов. Впоследствии был предложен ряд более усложненных моделей пористых сред. Однако трудно построить модель, достаточно полно учитывающую все особенности реальных пород-коллекторов. Кроме того, каждая новая усложненная модель требует ввода в рассмотрение целого ряда новых параметров, которые определяются экспериментальным путем, что, конечно, сложнее экспериментального определения только пористости и проницаемости. Тем не менее проблема описания микроструктуры пористых сред важна для количественного описания ряда физических процес-

сов, происходящих в пористых средах (прохождения электрического тока, движения элементарных частиц и т. д.) и поэтому продолжает привлекать к себе внимание исследователей.

Вообще следует отметить, что для некоторых определенных типов пород можно найти зависимости между пористостью и проницаемостью. Однако, несмотря на многочисленные попытки, общую связь пористости и проницаемости для широкого класса реальных пород найти не удается. В теории фильтрации принято считать, что закон Дарси перестает быть справедливым при быстрых движениях жидкостей или газов в пористой среде. При выявлении условий применимости закона Дарси возникло соображение об аналогии фильтрации и трубной гидравлики, где критерием нарушения ламинарного течения является достижение определенного критического значения числа Рейнольдса

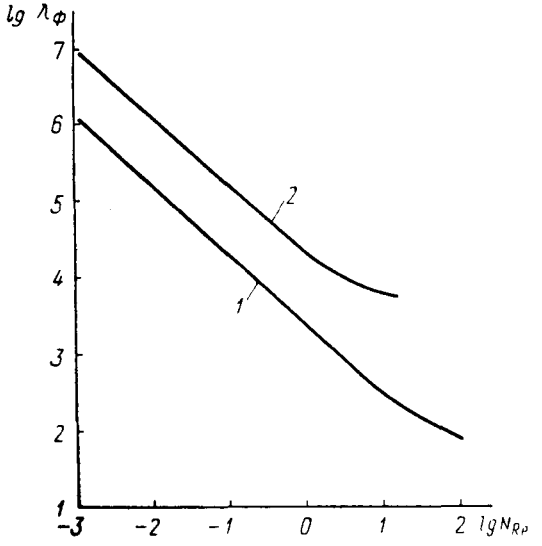



Рис. 40. Зависимость $\lg \lambda_ф$ от $\lg N_{Re}$:
1 — песок; 2 — песчаник;
$\lambda_ф = \frac{d\,|\,\mathrm{grad}\ p\,|}{2\rho v^2}$ ; $N_{Re} = \frac{v\,d\rho}{\mu}$

Формула, определяющая критическое число Рейнольдса для пористой среды, была впервые предложена Н. Н. Павловским [89].

Критические числа Рейнольдса, при которых перестает быть справедливым закон Дарси, составляют от 7,5 до 9,0 по Н. Н. Павловскому, от 0,22 до 0,290 по М. Д. Миллионщикову, от 1 до 12 по В. Н. Щелкачеву [95]. Существенное различие указанных величин критических чисел Рейнольдса объясняется различным выбором характерного линейного размера пористой среды. Все приведенные величины критических чисел на несколько порядков меньше критического числа Рейнольдса, принимаемого в трубной гидравлике равным 2300.

В качестве экспериментального подтверждения нарушения закона Дарси используются опыты Фэнчера, Льюиса и Бернса [112] и др. В отличие от нарушения ламинарного течения в трубах нарушение закона Дарси происходит плавно (рис. 40), при отсутствии характерного для переходного режима (с ламинарного на турбулентный) резкого увеличения гидравлического сопротивления [112]. Плавный характер изменения гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса позволил найти достаточно простые выражения

законов фильтрации, справедливые во всей области скоростей движения жидкостей и газов в пористой среде. Дюпюи и затем Форхгеймером [18, 95] был впервые предложен двучленный закон фильтрации.

В настоящее время двучленный закон фильтрации записывается в виде:

$$A\vec{v} + Bv\vec{v} = -\operatorname{grad} p, \quad A = -\frac{k}{\mu}. \tag{1.6}$$

Для того чтобы выяснить смысл величины $B$, сравним второй член правой части формулы (1.6) с известной в гидравлике формулой Дарси — Вейсбаха

$$|\operatorname{grad} p| = \frac{\lambda}{d}\frac{\rho u^2}{2}, \tag{1.7}$$

где $d$ — характерный линейный размер; $u$ — скорость движения жидкости или газа; $\lambda$ — коэффициент гидравлического сопротивления ; $\rho$ — плотность движущегося вещества.

Если положить $u = v$, то из сравнения (1.6) и (1.7) получим

$$B = \frac{\lambda\rho}{2d}. \tag{1.8}$$

Закон Дарси в соответствующим образом обобщенном виде применяется для описания фильтрации в деформируемых средах, фильтрации многофазных и многокомпонентных веществ, фильтрации в анизотропных средах и т. д. В случае деформируемых сред проницаемость принимается зависящей от напряженного состояния среды и на основе взаимосвязи напряженного состояния среды и давления получается связь проницаемости и давления. При описании многофазной фильтрации проницаемость принимается зависящей от насыщенности пористой среды соответствующей фазой. В случае фильтрации в анизотропных средах считается, что проницаемость различна в различных направлениях в среде.

Особый случай фильтрации имеет место, когда жидкость, насыщающая пористую среду, обладает неньютоновскими свойствами. Тогда фильтрация по закону Дарси либо может начинаться лишь при определенном значении градиента давления, либо при уменьшении градиента давления наблюдается более резкое снижение скорости фильтрации, чем это следует из закона Дарси.

## § 2. УСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Для описания течения жидкостей и газов в пористой среде наряду с законом фильтрации, связывающим скорость фильтрации и градиент давления, необходимо использовать закон сохранения массы фильтрующегося вещества. Уравнение неразрывности массы, отражающее этот закон, выводится для пористой среды таким же образом, как оно было получено и для общего случая движения материальной среды в § 4 первой главы. При выводе уравнения неразрывности

массы фильтрующегося вещества учитывается тот факт, что это вещество заключено лишь в порах среды. Поэтому, если пользоваться понятием скорости фильтрации, равной, как известно, расходу вещества, отнесенному к полной поверхности пористой среды, включая и материал среды и поры, то в уравнении неразрывности необходимо учитывать пористость среды.

Уравнение неразрывности массы фильтрующегося вещества, называемое часто просто уравнением неразрывности, для установившегося движения имеет следующий вид:

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \tag{2.1}$$

Будем рассматривать установившуюся фильтрацию, когда можно считать $\rho = \text{const}$. Тогда из (2.1) имеем

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \tag{2.2}$$

Будем считать пористую среду однородной и изотропной. Используя закон Дарси, из (2.2) получаем

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p = \nabla^2 p = 0. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3), являющееся уравнением Лапласа, описывает распределение давления при установившейся фильтрации однородной жидкости в однородной и изотропной пористой среде.

При одномерном движении несжимаемой жидкости в прямолинейном пласте уравнение фильтрации (2.3) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \tag{2.4}$$

Его интегрирование дает

$$p = Cx + C_1. \tag{2.5}$$

Выполняя условия $p = p_0$ при $x = 0$ и $p = p_к$ при $x = l$, имеем

$$\frac{p - p_0}{p_к - p_0} = \frac{x}{l}. \tag{2.6}$$

Переходя к расходу $q$ по формуле $q = vS$ ($S$ — поперечное сечение пласта), получаем, используя закон Дарси,

$$q = \frac{kS(p_0 - p_к)}{\mu l}. \tag{2.7}$$

Давление $p_0$ обычно называют давлением «на галерее», а $p_к$ — давлением «на контуре питания».

В случае одномерной радиальной фильтрации уравнение (2.3) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \tag{2.8}$$

Это уравнение имеет решение

$$p = A \ln r + B. \tag{2.9}$$

Выполним условия на границах:

$$p = p_c \text{ при } r = r_c, \quad p = p_к \text{ при } r = r_к. \tag{2.10}$$

Здесь $p_c$ — давление в скважине, а $p_к$ — давление на контуре питания.

В результате получаем

$$\frac{p - p_c}{p_к - p_c} = \frac{\ln \frac{r}{r_c}}{\ln \frac{r_к}{r_c}}. \tag{2.11}$$

При перепаде давления $\Delta p_c = p_к - p_c$ из радиального пласта добывается жидкость с расходом $q$. На фильтрующей поверхности скважины имеем

$$q = \frac{2\pi kh}{\mu} r_c \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=r_c}, \tag{2.12}$$

где $h$ — мощность (толщина) пласта.

Поскольку $\left(\frac{dp}{dr}\right)_{r=r_c} = \frac{p_к - p_c}{\ln \frac{r_к}{r_c}} \frac{1}{r_c}$, из (2.12) получаем формулу Дюпюи:

$$q = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_к - p_c}{\ln \frac{r_к}{r_c}}. \tag{2.13}$$

При применении формулы Дюпюи к реальным скважинам часто получается большое несоответствие между расчетными и фактическими величинами расходов жидкости $q$. Это объясняется наличием вблизи реальных скважин повышенных, а иногда пониженных фильтрационных сопротивлений, обусловленных естественным или искусственным изменением сообщаемости ствола скважины с пластом в результате загрязнения пласта при бурении скважины, пластической деформации пород, недостаточной перфорации обсадной трубы, воздействия на прискважинную (призабойную) зону пласта и т. д. В нефтегазопромысловой литературе изменение проницаемости пласта вблизи скважины часто называют эффектом «несовершенства скважины» или «скин-эффектом», который учитывают, вводя в формулу Дюпюи «эффективный» радиус скважины. На практике бывает, что отношение эффективного радиуса скважины к фактическому составляет величину, изменяющуюся примерно от $10^2$ до $10^{-5}$.

При центрально-симметричной фильтрации уравнение (2.13) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \tag{2.14}$$

Его решением является выражение

$$p = \frac{C}{r} + C_1, \tag{2.15}$$

где $C$ и $C_1$ — постоянные интегрирования.

Допустим, что фильтрация происходит в пласте между двумя концентричными сферическими поверхностями. Если на одной поверхности, имеющей радиус $r_с$, давление $p = p_с$, а на другой $p = p_к$ при $r = r_к$, то распределение давления в пласте будет выражаться формулой

$$\frac{p - p_с}{p_к - p_с} = \frac{\frac{1}{r_с} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_с} - \frac{1}{r_к}}. \qquad (2.16)$$

Интересно, что в случае центрально-симметричной фильтрации давление может иметь конечную величину при бесконечном радиусе внешней среды. Это видно из формулы (2.15). В случаях же прямолинейной и радиальной фильтрации давление становится бесконечным при стремлении к бесконечности расстояния между галереей или скважиной и контуром питания. При $r_к \to \infty$ из (2.16) получаем

$$\frac{p - p_с}{p_к - p_с} = 1 - \frac{r_с}{r}. \qquad (2.17)$$

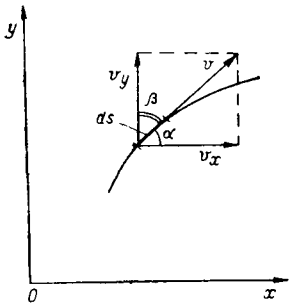



Рис. 41. Скорость фильтрации $v$ и ее проекции

Расход $q$ жидкости, фильтрующейся в пласте между двумя сферическими поверхностями, определяется формулой

$$q = \frac{4\pi k}{\mu} \frac{p_к - p_с}{\frac{1}{r_с} - \frac{1}{r_к}}. \qquad (2.18)$$

Из сопоставления формул (2.13) и (2.18) видно, что расход жидкости при прочих равных условиях в случае радиальной фильтрации растет пропорционально $(\ln r_к/r_с)^{-1}$, т. е. сравнительно медленно, а при сферической фильтрации — быстрее (пропорционально $r_с$).

Рассмотрим теперь двумерную фильтрацию. Уравнение фильтрации (2.3) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \qquad (2.19)$$

Если ввести потенциал фильтрации Ф, причем $\Phi = \frac{kp}{\mu}$, $v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, где $v_x$, $v_y$ — скорости фильтрации вдоль соответствующих осей, то из (2,19) получим уравнение для потенциала

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \qquad (2.20)$$

Введем представление о линиях тока и линиях равного потенциала. Линии тока — это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают по направлению с вектором скорости фильтрации

в данной точке. Линии равного потенциала или эквипотенциали — линии, на которых потенциал течения остается постоянным.

Согласно рис. 41 имеем формулы

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{|v|} = \frac{dx}{dl}, \quad \cos\beta = \frac{v_y}{|v|} = \frac{dy}{dl}, \tag{2.21}$$

где $|v|$ — модуль вектора скорости фильтрации.

Из (2.21) получаем дифференциальное уравнение линий тока

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}, \quad v_y\,dx - v_x\,dy = 0. \tag{2.22}$$

Пусть уравнение линий тока выражается в виде:

$$\Psi(x,\ y) = \text{const}. \tag{2.23}$$

Учитывая (2.22) и (2.23), имеем

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,dy = 0; \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,dy - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,dx = 0. \tag{2.25}$$

Из сравнения (2.24) и (2.25) получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \tag{2.26}$$

Если теперь ввести в рассмотрение функцию комплексного переменного $F(z) = \Phi + i\Psi$, то уравнения (2.26) можно считать условиями Коши — Римана. Таким образом, каждой аналитической функцией комплексного переменного $F(z)$ описывается определенное установившееся течение в плоскости $x$, $y$.

Методы функции комплексного переменного нашли широкое применение в плоских задачах теории фильтрации благодаря работам Н. Н. Павловского [89], П. Я. Полубариновой-Кочиной [93] и др.

Плоские течения в пластах рассматривались с использованием функций комплексного переменного В. П. Пилатовским [90].

Прежде всего рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{q}{2\pi}\ln z. \tag{2.27}$$

Непосредственной проверкой можно легко убедиться в том, что вещественная и мнимая части этой функции удовлетворяют условиям (2.26) и, следовательно, эта функция является аналитической. Из (2.27) получаем, отделяя мнимую и вещественную части,

$$\Phi = \frac{q}{2\pi h}\ln(x^2+y^2)^{1/2}, \quad \Psi = \frac{q}{2\pi h}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{2.28}$$

Эквипотенциал данного течения представляют собой семейство окружностей, а линии тока — пучок прямых, проходящих через начало координат. Обозначая $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ и рассматривая течение между двумя концентрическими окружностями, легко получить формулу Дюпюи. Если $r \to 0$, имеем решение, определяющее течение к так называемому «точечному» источнику.

В трехмерном случае уравнение (2.3) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \tag{2.29}$$

Его решением, описывающим фильтрацию к точечному стоку расположенному в точке $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, будет выражение

$$p = \frac{q\mu}{4\pi k}\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{-1/2}. \tag{2.30}$$

Используя принцип наложения (суперпозиции) решений (2.30), а также считая, что $q = q(x_0, y_0, z_0)$, и выполняя соответствующие граничные условия, можно получить решения, описывающие установившуюся фильтрацию в трехмерных областях со сложной конфигурацией.

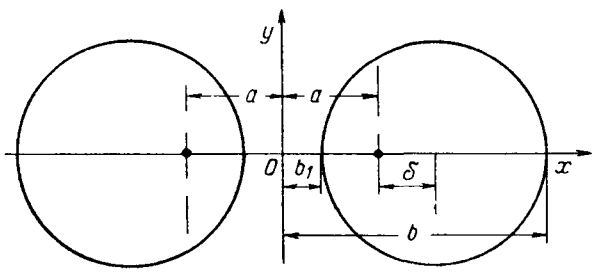



Рис. 42. Расположение точечных источника и стока

Вернемся теперь снова к рассмотрению некоторых случаев фильтрации в двумерной области, представляющих интерес для практики.

В качестве одного из примеров рассмотрим установившееся течение в пласте от источника к стоку и покажем, как, используя полученное решение, можно найти решение задачи об установившейся фильтрации к скважине, расположенной эксцентрично в пласте круговой формы. Используем методику решения этой задачи, данную И. А. Чарным [119].

Пусть в точке $x = a$ (рис. 42) расположен точечный сток, а в точке $x = -a$ находится точечный источник. Уравнение Лапласа, которому удовлетворяют функции Ф и Ψ, линейно, и, следовательно, сумма двух решений этого уравнения также является его решением.

Поэтому можно немедленно выписать искомое решение в следующем виде:

$$F(z)=\frac{q}{2\pi h}[\ln(z-a)-\ln(z+a)]. \tag{2.31}$$

Отделяя вещественную часть в формуле (2.31), имеем

$$\Phi=\frac{q}{2\pi h}\ln\left[\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right]^{1/2}. \tag{2.32}$$

Уравнение эквипотенциалей в этом случае будет

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=\text{const}. \tag{2.33}$$

Уравнение (2.33) является уравнением семейства окружностей, эксцентричных по отношению к источнику и стоку. Одну из окружностей можно принять за эквипотенциаль, а сток или источник можно приближенно считать имеющим малый, но не равный нулю радиус $r_c$.

Тогда можно считать, что в любой точке при $r = r_c$ потенциал постоянен и равен $\Phi_c$. При $y = 0$ из (2.32) имеем

$$\Phi=\frac{q}{2\pi h}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|, \tag{2.34}$$

а при $r \to r_c$ приближенно можно полагать (см. рис. 42), что

$$\left|\frac{x-a}{x+a}\right|_{x\to a}\approx\frac{r_c}{2a}. \tag{2.35}$$

Вертикальные линии в формулах (2.34) и (2.35) означают, что рассматривается абсолютное значение величины $(x - a)/(x + a)$.

Из формулы (2.34) и рис. 42 вытекает, что при $x = b$ и $x = b_1$ имеет место соотношение

$$\frac{b-a}{b+a}=\frac{a-b_1}{b_1+a}. \tag{2.36}$$

Учитывая, что $\frac{b-b_1}{2}=r_к$ и согласно рис. 42 $b = a + \delta + r_к$, а при $x = b$ $\Phi = \Phi_к$, получаем

$$\Phi_к=\frac{q}{2\pi h}\ln\frac{b-a}{b+a}=\frac{q}{2\pi h}\ln\frac{\delta}{r_к}. \tag{2.37}$$

Из (2.34) и (2.37) имеем

$$q=\frac{2\pi h(\Phi_к-\Phi_c)}{\ln\frac{r_к}{r_c}\left(1-\frac{\delta^2}{r_к^2}\right)}. \tag{2.38}$$

При отсутствии эксцентриситета, т. е. при $\delta = 0$, из (2.38) получаем формулу Дюпюи.

При исследовании плоских течений широко применяется теория функций комплексного переменного и, в частности, конформное преобразование.

Рассмотрим, например, приток жидкости с дебитом $q$ из бесконечного пласта мощностью $h$ к тонкой щели (рис. 43) длиной $2l$. Используем функцию Н. Е. Жуковского

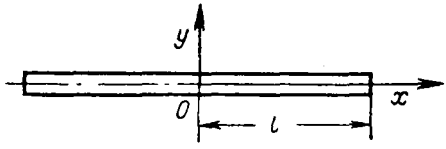


Рис. 43. Трещина

$$z=\frac{l}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right). \quad (2.39)$$

Как было сказано выше, эта функция переводит окружности области комплексного переменного $\zeta$ в эллипсы области комплексного переменного $z$.

Пусть в области $\zeta$ дана функция

$$F=\frac{q}{2\pi h}\ln\zeta+C. \quad (2.40)$$

Она описывает течение жидкости в бесконечном пласте с круговым вырезом. Если перейти в область $z$, то формула (2.40) будет описывать течение из тонкой щели в неограниченный пласт.

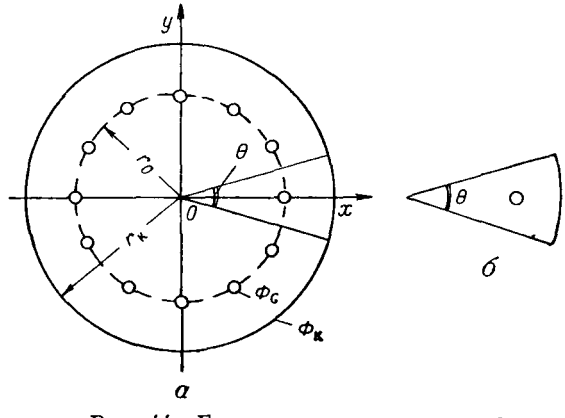


Рис. 44. Батарея скважин в пласте

В качестве второго примера рассмотрим течение в пласте, имеющем в плане круговую форму и содержащем «батарею» из $n$ скважин, расположенных по окружности радиусом $r_0$, концентричной по отношению к внешнему контуру $r_к$ пласта (рис. 44, *а*).

Можно, исходя из симметрии, рассматривать течение в одном секторе с углом $\theta$ (см. рис. 44, *б*). Применим теперь следующее преобразование:

$$\zeta=z^n. \quad (2.41)$$

Оно производит «развертку» сектора (см. рис. 44, *б*) на полный круг.

Таким образом, если в плоскости $z$ имеем сектор с источником, то в плоскости $\zeta$ получаем источник, расположенный эксцентрично в круге. Решение задачи об источнике или стоке, расположенном эксцентрично в пласте круговой формы в плане, было получено выше. Дебит скважины в этом случае определяется формулой (2.38).

Теперь, полагая, что потенциалы на скважине и контуре питания остаются одинаковыми как в плоскости $z$, так и в плоскости $\zeta$, достаточно в формуле (2.38) заменить геометрические параметры в соответствии с преобразованием (2.41), чтобы получить формулу, определяющую дебит скважины, расположенной в секторе (см. рис. 44, *б*).

Положим $\zeta = \rho e^{i\Phi}$, $z = re^{i\theta}$. Тогда в соответствии с (2.41) $\rho_к = r_к^n$, $\Phi = n\theta$, $\delta = r_0^n$. Заметим, что в формуле (2.38) теперь вместо $r_к$, $r_с$ будем иметь $\rho_к$, $\rho_с$. Для того чтобы найти зависимость между $\rho_с$ и $r_с$, примем эти величины достаточно малыми по сравнению с $\rho_к$ и $r_к$.

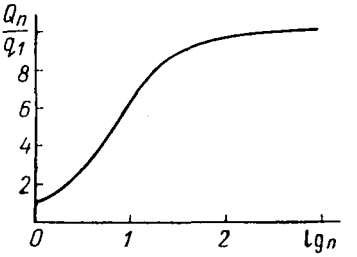



Рис. 45. Зависимость $Q_n/q_1$ от $\ln n$

Из (2.41) следует, что каждой точке плоскости $\zeta$ соответствует определенная точка плоскости $z$, а также что в этой паре точек существует определенное значение производной $\frac{d\zeta}{dz}$. Если считать радиусы $\rho_с$ и $r_с$ малыми отрезками соответствующих областей, то, поскольку $d\zeta$ и $dz$ — бесконечно малые отрезки, можно приближенно написать

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| \approx \frac{\rho_с}{r_с} \quad \text{при } z = r_0. \tag{2.42}$$

Отсюда

$$\rho_с = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right) r_с \quad \text{при } z = r_0. \tag{2.43}$$

Подставив указанные выше величины в (2.38), получим формулу, определяющую дебит $q$ каждой скважины в батарее (см. рис. 44, *а*):

$$q = \frac{2\pi h\,(\Phi_к - \Phi_с)}{\ln\left(\frac{r_к}{r_0}\right)^n \frac{r_0}{nr_с}\left[1 - \frac{1}{\left(\frac{r_к}{r_0}\right)^{2n}}\right]}. \tag{2.44}$$

Формулу (2.44) ввиду принятых при ее выводе приближений можно применять при $n$, изменяющемся от единицы до величины, примерно равной $r_0/r_с$.

Интересно проследить зависимость суммарного дебита всех скважин в батарее $Q_n$ от числа скважин $n$. Для простоты примем отношение $Q_n$ к дебиту одной скважины $q_1$ при одних и тех же значениях параметров $h$ и $(\Phi_к - \Phi_с)$ и положим $r_к/r_0 = 2$, $r_0/r_с = 1000$. График зависимости $Q_n/q_1 = f(\lg n)$ показан на рис. 45 из кото-

рого видно, что при увеличении числа скважин в батарее от одной до десяти суммарный дебит батареи увеличивается только в 6,4 раза, а при увеличении числа скважин от одной до ста $Q_n$ увеличивается в 10 раз.

При увеличении числа скважин свыше ста суммарный дебит батареи практически не увеличивается. Описанное выше явление непропорционального увеличения суммарного дебита батареи с ростом числа скважин обусловлено их взаимным влиянием, носящим название интерференции скважин.

При числе скважин, превышающем сто, суммарный дебит батареи становится практически равным дебиту одной крупной скважины радиусом $r_0$ при том же значении $r_к$ — радиуса контура питания.

## § 3. НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ

При неустановившемся движении жидкости в пористой среде изменения во времени давления и скорости жидкости приводят к изменению плотности жидкости и пористости пород.

При выводе уравнения неустановившейся фильтрации необходимо знать зависимость плотности жидкости от давления, а также учитывать изменение порового объема при изменении напряженного состояния пород, вызванного перераспределением давления жидкости.

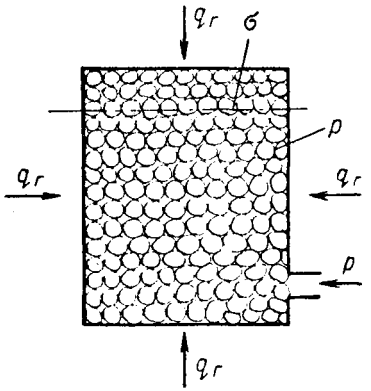


Рис. 46. Действие усилий на образец пористой среды

Важное значение для понимания механизма влияния сжимаемости пород на фильтрацию имели работы Н. М. Герсеванова [29], М. А. Био [133], В. А. Флорина [113], Ц. Е. Джекоба [140], В. Н. Щелкачева [125, 126] и др. Теория неустановившейся фильтрации в нефтеводоносных пластах с учетом сжимаемости жидкости и пород получила наиболее полное развитие в работах В. Н. Щелкачева [125, 126]. Напряженное состояние пористых пород, насыщенных жидкостью, будет подробно рассмотрено в следующей главе. Здесь же укажем некоторые основные закономерности механического взаимодействия горных пород и насыщающих их веществ, необходимые при выводе уравнения неустановившейся фильтрации жидкости

Для того чтобы более наглядно представить механизм сжимаемости пористых, насыщенных жидкостью, горных пород, рассмотрим образец некоторой особой пористой среды, имеющей высокую сжимаемость зерен (например, пористая среда, составленная из резиновых шариков, наполненных воздухом). Этот образец (рис. 46) покрыт непроницаемой пленкой и равномерно сжат внешней нагрузкой

$q_г$, имитирующей горное давление. Давление жидкости внутри пор образца равно $p$, а напряжение в зернах равно $\sigma$.

Из теории механического взаимодействия пористых горных пород и насыщающих их жидкостей известно, что

$$q_г = \sigma + p. \tag{3.1}$$

Отсюда, если изменить давление жидкости $p$ и оставить неизменным $q_г$, изменится напряжение в пористой среде $\sigma$, зерна среды деформируются и пористость среды изменится. Если же изменить давление жидкости $p$ на некоторую величину и на такую же величину изменить $q_г$, то $\sigma$ останется неизменной. Шарики, составляющие рассматриваемую среду, лишь сожмутся или разожмутся, а конфигурация их не изменится. Таким образом, пористость среды в принципе не должна изменяться от действия внутрипорового давления — она является функцией напряжения $\sigma$. Абсолютная же величина порового объема будет изменяться при изменении давления $p$ и неизменном $\sigma$. Так, при сильном сжатии давлением $p$ при $\sigma = \text{const}$ шарики сожмутся и весь объем образца значительно уменьшится. При этом, конечно, уменьшится и поровый объем.

Подобная картина изменения пористости и порового объема пород будет наблюдаться и в реальных пластах, ограниченных непроницаемыми кровлей и подошвой.

При учете сжимаемости насыщающей поры жидкости обычно принимают линейную зависимость плотности жидкости $\rho_ж$ от давления $p$, т. е.

$$\rho_ж = \rho^0_ж [1 + \beta_ж (p - p_0)], \tag{3.2}$$

где $\rho^0_ж$ — плотность жидкости при начальном давлении $p_0$; $\beta_ж$ — коэффициент сжимаемости жидкости.

Зависимость пористости $m$ от среднего нормального напряжения $\sigma$ также принимают линейной в виде:

$$m = m_0 - \beta_п \sigma, \tag{3.3}$$

где $\beta_п$ — сжимаемость пород.

Учесть изменение порового объема пласта при изменении давления жидкости можно различными способами. Можно, как это было сделано Джекобом [140], учитывать изменение мощности пласта при изменении давления жидкости. Можно также условно считать, что в формулу (3.1) давление $p$ входит с некоторым коэффициентом, не равным единице. Можно, наконец, учитывать в уравнении неразрывности изменение объема пористой среды путем использования уравнения неразрывности, полученного для единицы массы пористой среды [50].

Обозначим некоторую массу пористой среды $M_п$. При этом

$$M_п = \rho_п V_п. \tag{3.4}$$

В формуле (3.4) $\rho_п$ — плотность пористой среды; $V_п$ — рассматриваемый объем пористой среды.

Масса жидкости, насыщающей рассматриваемую массу пористой среды, обозначается $M_ж$, так что

$$M_ж = \rho_ж m V_п. \tag{3.5}$$

При постоянном объеме пористой среды $V_п = \text{const}$ из (3.5) получаем уравнение неразрывности в следующем виде:

$$M_ж = \text{const}; \quad dM_ж = V_п d(\rho_ж m) = 0;$$

$$\frac{d(\rho_ж m)}{dt} = \frac{\partial(m\rho_ж)}{\partial t} + \operatorname{div} m\rho_ж \vec{v}_c = \frac{\partial(m\rho_ж)}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_ж \vec{v}_c = 0, \tag{3.6}$$

где $v_c$ — средняя скорость движения жидкости в пористой среде, причем

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{v}}{m}. \tag{3.7}$$

При выводе уравнения сохранения массы фильтрующейся жидкости (уравнения неразрывности) в элементе пористой среды постоянной массы следует положить

$$M_п = \text{const}, \quad dM_п = d(\rho_п V_п) = 0$$

$$dV_п = -\frac{V_п}{\rho_п} d\rho_п. \tag{3.8}$$

Из (3.5) получаем

$$M_ж = \text{const}; \quad dM_ж = d(\rho_ж m V_п) = 0;$$

$$d(m\rho_ж) - m\frac{\rho_ж}{\rho_п} d\rho_п = 0. \tag{3.9}$$

Если пренебречь движением пористой среды, получим уравнение неразрывности в следующем виде:

$$\frac{\partial(m\rho_ж)}{\partial t} - m\frac{\rho_ж}{\rho_п}\frac{\partial \rho_п}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_ж \vec{v} \approx 0. \tag{3.10}$$

Учитывая (3.1) и (3.2), а также осредняя $\rho_ж$, из (3.10) получаем

$$\left(m\beta_ж + \beta_п - \frac{m\beta_м}{\rho_п}\right)\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} = 0, \tag{3.11}$$

где $\beta_м$ — сжимаемость материала пористой среды от давления жидкости.

Можно, далее, положить

$$\beta = m\beta_ж + \beta_c; \quad \beta_c = \beta_п - \frac{m\beta_м}{\rho_п}. \tag{3.12}$$

Величину $\beta$ принято называть по предложению В. Н. Щелкачева упругоемкостью пласта.

Используя в формуле (3.11) закон Дарси, получаем уравнение фильтрации сжимаемой жидкости в сжимаемой пористой среде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \nabla^2 p, \quad \varkappa = \frac{k}{\mu(m\beta_{\text{ж}} + \beta_{\text{с}})}. \tag{3.13}$$

Уравнение (3.13) называют также уравнением упругого режима. Величина $\varkappa$ называется пьезопроводностью.

Уравнение (3.13) вполне аналогично классическому уравнению теплопроводности, полученному французским математиком Фурье в XIX веке. Поэтому все созданные в классической теории теплопроводности методы могут быть непосредственно применены и в теории неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме.

Процессы неустановившейся, как и установившейся, фильтрации жидкости в однородных пластах в настоящее время достаточно подробно изучены подземной гидродинамикой [18, 38, 39, 60, 126]. Изложение здесь во всех деталях вопросов фильтрации заняло бы много места. Ниже рассмотрим лишь наиболее простые и вместе с тем практически важные случаи фильтрации при упругом режиме. Начнем с задачи о притоке упругой жидкости из полубесконечного упругого пласта к галерее. Пусть на границе (галерее) пласта $x = 0$ (рис. 47), давление жидкости в момент времени $t \geqslant 0$ стало равным $p_1$. До этого давление во всем пласте было равным $p_{\text{к}}$. Уравнение фильтрации в этом случае принимает вид:

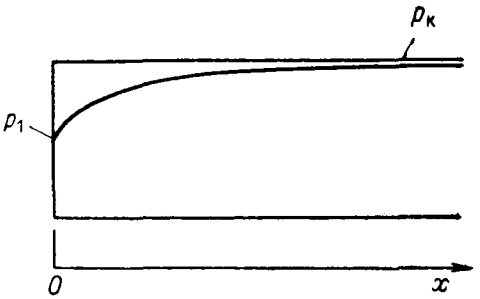


Рис. 47. Распределение давления в пласте

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{3.14}$$

Начальное и граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} &p = p_{\text{к}} \text{ при } x = 0, \quad t = 0; \\ &p = p_{\text{к}} \text{ при } x \to \infty, \quad t; \\ &p = p_1 \text{ при } x = 0, \quad t. \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Введем величину $f = \frac{p - p_{\text{к}}}{p_1 - p_{\text{к}}}$. Тогда условия (3.15) перепишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} &f = 0 \text{ при } x = 0, \quad t = 0; \\ &f = 0 \text{ при } x \to \infty, \quad t \\ &f = 1 \text{ при } x = 0, \quad t. \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Величина $f$ может зависеть только от координаты $x$, времени $t$ и пьезопроводности $\varkappa$, т. е. $f = f(x, t, \varkappa)$. Применяя анализ размерностей, получаем

$$f = f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(\varkappa t)^{1/2}}. \tag{3.17}$$

Подставляя (3.17) в (3.14), получаем следующую задачу:

$$f'' + \frac{\xi}{2} f' = 0; \tag{3.18}$$

$$f = 0 \text{ при } \xi \to \infty, \quad f = 1 \text{ при } \xi = 0.$$

Интегрируя (3.18), имеем

$$f = C_1 \int \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi + C_2. \tag{3.19}$$

Учитывая условия (3.18), получаем

$$C_1 = -\frac{1}{\pi^{-1/2}}, \quad C_2 = 1 \tag{3.20}$$

или окончательно

$$f = 1 - \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi. \tag{3.21}$$

Часто вместо переменной $\xi$ выбирают $z = \frac{\xi}{2}$. Тогда вместо (3.21) получается

$$f = 1 - \operatorname{erf}(\xi), \quad \operatorname{erf}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^{\xi} \exp(-z^2)\, dz. \tag{3.22}$$

Функция $\operatorname{erf}(\xi)$ называется интегралом вероятности. Она затабулирована в математических справочниках.

Интересно отметить, что распределение функции $f$ или давления жидкости с течением времени не стремится к распределению, характерному для установившейся фильтрации. Это объясняется тем, что рассмотренная выше задача по своему физическому смыслу представляет собой задачу об истощении полубесконечного пласта. Таким образом, давление в пласте, начиная с $x = 0$, непрерывно стремится к граничному значению $p_1$.

Рассмотрим теперь задачу о притоке жидкости к скважине очень малого, «нулевого», радиуса в бесконечном плоском пласте при упругом режиме.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ давление жидкости в пласте было равно $p_к$. При $t > 0$ из скважины нулевого радиуса начинают отбирать жидкость с постоянным расходом $q$, т. е. в скважине имеем граничное условие

$$q = 2\pi \frac{kh}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r \to 0}. \tag{3.23}$$

Уравнение фильтрации теперь имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}\right). \tag{3.24}$$

Решение ищем в виде:

$$f=\frac{2\pi kh\,(p_к-p)}{q\mu}=f\left(\frac{r}{\varkappa^{1/2}t^{1/2}}\right). \tag{3.25}$$

Подставляя (3.25) в (3.24) и принимая во внимание условие $f = 0$ при $x \to \infty$ и $t = 0$ и граничное условие (3.23), приходим к следующей задаче:

$$\frac{du}{d\xi}+\frac{\xi u}{2}=0;\quad u=\xi\frac{df}{d\xi};\quad \xi=\frac{r}{\varkappa^{1/2}t^{1/2}}; \tag{3.26}$$

$$f=0 \text{ при } \xi\to\infty,\quad \left(\xi\frac{df}{d\xi}\right)_{\xi\to 0}=-1.$$

Интегрируя (3.26), получаем

$$f=\int_{\xi}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)}{\xi}d\xi. \tag{3.27}$$

Преобразуем интеграл (3.27) путем ввода переменной $u_1=\frac{\xi^2}{4}$. Из (3.25) и (3.27) получаем

$$p_к-p=\frac{q\mu}{2\pi kh}\int_{\xi}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)}{\xi}d\xi=\frac{q\mu}{4\pi kh}\int_{\frac{\xi^2}{4}}^{\infty}\frac{\exp(-u_1)}{u_1}du_1=$$

$$=-\frac{q\mu}{4\pi kh}Ei\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right), \tag{3.28}$$

где $-Ei\,(-r^2/4\varkappa t)$ — затабулированная функция. При малых значениях аргумента $r^2/4\varkappa t$ для функции $-Ei\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right)$ существует приближенное выражение

$$-Ei\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right)\approx\ln\frac{2{,}25\varkappa t}{r^2}. \tag{3.29}$$

Таким образом, из (3.28) и (3.29) имеем при больших $t$

$$p_к-p\approx\frac{q\mu}{4\pi kh}\ln\frac{2{,}25\varkappa t}{r^2}. \tag{3.30}$$

Из выражения (3.28) видно, что при малых значениях $u_1$, например при $u_1 < 0{,}01$, $\exp(-u_1)\approx 1$, в связи с чем становится справедливым приближенное выражение (3.29).

Пусть измеряется давление при определенном значении $r$, например в скважине при $r = r_c$. Если $r_c = 10$ см, $\varkappa = 10^4$ см$^2$/с, то уже при $t = 2{,}5$ с величина $\frac{r^2}{4\varkappa t} = 10^{-4} \ll 0{,}01$, и таким образом с большой точностью можно пользоваться формулами (3.29) и (3.30).

Из (3.30) следует, что при больших $t$ перепад давления $p_к - p$ возрастает медленно, и можно приближенно принимать его установившимся. Если в момент времени $t_0$ прекратить отбор жидкости из скважины, то давление в скважине начнет повышаться, т. е. «восстанавливаться». Прекращение отбора жидкости из скважины равносильно закачке в скважину жидкости с дебитом $q$ при непрекращающемся отборе жидкости с тем же дебитом.

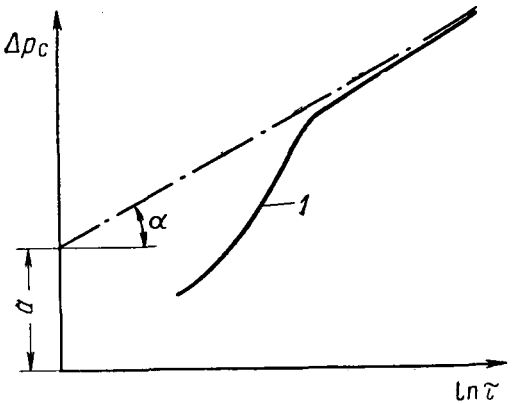



Рис. 48. Зависимость $\Delta p_c$ от $\ln \tau$:
*1* — кривая восстановления давления;
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{q\mu}{4\pi kh}$; $a = \frac{q\mu}{4\pi kh} \ln \frac{2{,}25\varkappa}{r_c^2}$

Превышение давления в скважине $\Delta p_c$ над прежним уровнем давления также можно приближенно выразить формулой

$$\Delta p_c = \frac{q\mu}{4\pi kh} \ln \frac{2{,}25\varkappa\tau}{r_c^2}, \qquad \tau = t - t_0. \qquad (3.31)$$

Формула (3.31) используется для определения параметров пласта по данным о восстановлении давления в скважинах. На рис. 48 показана фактическая кривая восстановления давления в скважине. По наклону кривой при больших $\tau$ вычисляется величина $q\mu/4\pi kh$, а по отрезку $a$, отсекаемому на оси ординат, определяется $\varkappa/r_c^2$. Отсюда вычисляются проницаемость и пьезопроводность пласта, если известны мощность пласта, вязкость жидкости и радиус скважины.

Изложение методов исследования скважин при различных условиях на границах пласта можно найти, например, в работе [24].

## § 4. ДВИЖЕНИЕ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Природный газ в отличие от нефти и воды — сильно сжимаемое вещество. Это свойство газа учитывается существенным образом при математическом описании его движения в пористой среде. Уравнение неустановившейся фильтрации газа было впервые получено Л. С. Лейбензоном [64].

При выводе уравнения фильтрации газа используются уравнение неразрывности движущейся массы газа, закон фильтрации и уравне-

ние состояния газа. При сравнительно небольших скоростях фильтрации газа в пластовых условиях справедлив закон Дарси. Ввиду большой сжимаемости газа сжимаемостью пористой среды можно пренебрегать, считая $m = \text{const}$. Подставляя в уравнение неразрывности массы газа

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \tag{4.1}$$

уравнение состояния реального газа в форме

$$\frac{p}{\rho} = z(p,\ T)RT, \tag{4.2}$$

а также используя закон Дарси, получаем уравнение изотермической фильтрации реального газа:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{z}\right) = \frac{k}{\mu m}\operatorname{div}\frac{p}{z}\operatorname{grad} p. \tag{4.3}$$

В случае идеального газа $z \equiv 1$. Тогда из (4.3) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu m}\operatorname{div} p \operatorname{grad} p. \tag{4.4}$$

Уравнения (4.3) и (4.4) являются нелинейными относительно давления $p$.

Рассмотрим прежде всего установившееся движение газа, когда $\partial p/\partial t = 0$. Из (4.3), например, получаем

$$\operatorname{div}\frac{p}{z}\operatorname{grad} p = 0. \tag{4.5}$$

Для получения решения уравнения (4.5) вводится функция Л. С. Лейбензона

$$L(p) = \int \frac{p}{z(p)}\,dp + C, \tag{4.6}$$

где $C$ — постоянная интегрирования.

Тогда

$$\operatorname{grad} L = L'(p)\operatorname{grad} p = \frac{p}{z(p)}\operatorname{grad} p. \tag{4.7}$$

Следовательно, из (4.5) имеем

$$\nabla^2 L = 0. \tag{4.8}$$

Таким образом, вычисление установившегося движения реального газа с учетом уравнения состояния (4.2) сводится к решению уравнения Лапласа для функции $L(p)$. Для идеального газа функция Л. С. Лейбензона имеет более простой вид:

$$L(p) = \int p\,dp + C = \frac{p^2}{2} + C, \tag{4.9}$$

Можно также просто положить $L = p^2$, и тогда при $z \equiv 1$ из (4.5) получим

$$\nabla^2 L = 0. \tag{4.10}$$

При прямолинейном плоском движении газа решением уравнения (4.10) будет

$$L = p^2 = Ax + B. \tag{4.11}$$

Скорость фильтрации газа в пластовых условиях $\vec{v}_п$ выражается через градиент давления, так же как и для жидкости, в виде закона Дарси

$$\vec{v}_п = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{4.12}$$

В соответствии с уравнением состояния идеального газа при изотермическом процессе имеем

$$v_п p = v_a p_a. \tag{4.13}$$

В формуле (4.13) $v_a$ является объемом некоторой весовой единицы газа при атмосферном давлении $p_a$. Подставляя (4.13) в (4.12), получаем

$$\vec{v}_a = -\frac{k}{\mu p_a} p \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{4.14}$$

Интегрируя уравнение (4.14) при $v_a = \text{const}$, получаем формулу для объемного расхода газа $q_a$, замеренного при атмосферном давлении $p_a$, фильтрующегося через пласт длиной $l$, шириной $b$ и мощностью $h$:

$$q_a = \frac{kbh(p_к^2 - p_a^2)}{2\mu p_a l}, \tag{4.15}$$

где $p_к$ — давление газа при $x = l$; $p_с$ — давление при $x = 0$.

Формула для распределения давления в пласте имеет вид:

$$p^2 = p_с^2 + \frac{2q_a \mu p_a}{kbh} x. \tag{4.16}$$

Совершенно аналогично получается формула для установившейся изотермической фильтрации газа к скважине радиусом $r_с$ в пласте круговой формы радиусом $r_к$, когда давление $p = p_с$ при $r = r_с$ и $p = p_к$ при $r = r_к$. В этом случае имеем

$$q_a = \frac{\pi kh(p_к^2 - p_с^2)}{\mu p_a \ln \frac{r_к}{r_с}}. \tag{4.17}$$

Распределение давления газа в пласте таково, что давление газа вблизи скважин изменяется очень резко. Так называемые «воронки депрессии» вблизи газовых скважин очень узки по сравнению с обычно применяемыми расстояниями между скважинами. Б. Б. Лапук обнаружил [125] важную особенность разработки газовых пластов,

заключающуюся в том, что узость воронки депрессии вблизи газовых скважин приводит к тому, что средневзвешенное давление в разрабатываемых газовых пластах оказывается очень близким к пластовому давлению. Использование этой особенности при инженерных расчетах извлечения газа из пластов позволяет не учитывать движение газа вблизи отдельных скважин, а рассматривать разработку газовых пластов в целом. Это существенно упрощает расчеты разработки газовых пластов.

Если фильтрация газа является изотермической, это значит, что к движущемуся в пористой среде газу подводится тепло, которое отнимается у горных пород-коллекторов.

При математическом описании общих случаев неизотермической фильтрации газа необходимо использовать, помимо уравнения движения, еще и уравнение энергии. В тех же случаях, когда можно принять, что при неизотермической фильтрации газа на каком-то отрезке времени в породах содержится достаточное количество тепла, так что отдача породами тепла газу несущественно снижает температуру пород, уравнение энергии можно не учитывать. Тогда неизотермическая неустановившаяся фильтрация газа будет описываться уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{zT}\right)=\frac{k}{\mu m}\operatorname{div}\frac{p}{zT}\operatorname{grad}p. \tag{4.18}$$

При установившейся фильтрации из (4.18) имеем

$$\operatorname{div}\frac{p}{zT}\operatorname{grad}p=0. \tag{4.19}$$

Путем применения функции

$$\Theta=\int\frac{p}{zT}dp+C \tag{4.20}$$

уравнение (4.19) также сводится к уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Theta=0. \tag{4.21}$$

Рассмотрим теперь неизотермическую фильтрацию идеального газа, когда в пласте имеется заданное распределение температуры. Такой случай фильтрации может возникнуть, например, при осуществлении подземного горения, когда в зоне пласта с переменной температурой движется воздух. Из (4.19) для этого случая при одномерной прямолинейной фильтрации имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{T}\frac{\partial p}{\partial x}=0. \tag{4.22}$$

Допустим, что распределение температуры в пласте длиной $l$ имеет вид:

$$T=T_0+\frac{T_к-T_0}{l}x. \tag{4.23}$$

В формуле (4.23) $T_0$ — температура на входе в пласт, а $T_к$ — на выходе из пласта. Интегрирование уравнения (4.22) при распределении температуры (4.23) дает следующее распределение давления в пласте:

$$\frac{p^2-p_c^2}{p_к^2-p_c^2}=\frac{2T_0}{T_к+T_0}\frac{x}{l}+\frac{T_к-T_0}{T_к+T_0}\frac{x^2}{l^2}. \tag{4.24}$$

В случае $T_0 \ll T_к$ из (4.24) получаем следующую формулу для распределения давления:

$$\frac{p^2-p_c^2}{p_к^2-p_c^2}=\frac{x^2}{l^2}, \tag{4.25}$$

отличающуюся от формулы распределения давления при изотермической фильтрации газа.

Рассмотрим, наконец, неустановившуюся изотермическую фильтрацию идеального газа. Возьмем случай одномерной прямолинейной фильтрации. Уравнение фильтрации в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{k}{\mu m}\frac{\partial}{\partial x}p\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{4.26}$$

Пусть на границе полубесконечного пласта шириной $b$ и мощностью $h$ заданы следующие условия:

$$p=p_c \text{ при } x=0 \text{ и } p=p_к \text{ при } x\to\infty. \tag{4.27}$$

Решая эту задачу приближенно, будем считать, что распределение давления газа задано следующей формулой:

$$p^2=A\frac{x}{l(t)}-\frac{A}{2}\frac{x^2}{l^2(t)}+p_к^2-\frac{A}{2};$$
$$A=2(p_к^2-p_c^2). \tag{4.28}$$

При этом $p=p_к$, $\partial p/\partial x=0$ при $x=l(t)$. Здесь $l(t)$ — граница области возмущения давления, т. е. расстояние от границы $x=0$ до области, где еще давление равно начальному пластовому.

Из решения задачи получаем следующую формулу для определения расстояния $l(t)$:

$$l(t)=\left(\frac{2A^{1/2}kt}{\mu m J_1}\right)^{1/2}. \tag{4.29}$$

Входящая в формулу (4.29) величина $J_1$ определяется следующим образом:

$$J_1=\int_0^1\frac{\xi-\xi^2}{(\xi-\xi^2+\lambda)^{1/2}}d\xi; \quad \lambda=\frac{p_к^2}{A}-0{,}5. \tag{4.30}$$

Сделаем оценку величины $l(t)$. Допустим, что $p_к=9{,}81\cdot10^6$ Па$=$ $=100$ кгс/см$^2$, $k=10^{-9}$ см$^2$, $\mu=0{,}02$ сПз $\approx2\cdot10^{-10}$ кгс$\cdot$с/см$^2$, $t=10^6$ с. Величина $\lambda\approx0{,}5$ и $J\approx0{,}27$.

Тогда

$$l=\left(\frac{2\cdot200^{1/2}\cdot10^{-9}\cdot10^6}{2\cdot10^{-10}\cdot0{,}2\cdot0{,}2}\right)^{1/2}\approx600 \text{ м}. \tag{4.31}$$

Для сопоставления $l$ с $l_ж$ — границей области возмущения давления при неустановившейся фильтрации жидкости в аналогичном случае с использованием такого же приближенного способа решения задачи получаем

$$l_ж(t) = (12\varkappa t)^{1/2}. \tag{4.32}$$

Если, например, жидкость имеет вязкость 1 сПз $= 10^{-8}$ кгс · с/см$^2$, $k = 10^{-9}$ см$^2$ и $\beta = 1{,}02 \cdot 10^{-10}$ 1/Па $= 10^{-5}$ см$^2$/кг, то $\varkappa = 10^4$ см$^2$/с. Тогда при $t = 10^6$ с

$$l_ж = (12 \cdot 10^4 \cdot 10^6)^{1/2} \approx 3{,}5 \text{ км}. \tag{4.33}$$

Из сравнения $l$ и $l_ж$ в случаях (4.31) и (4.32) можно видеть, что распространение волны давления в жидкости происходит быстрее, чем в газе.

## § 5. ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ВОДОЙ ИЗ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Широкое распространение методов заводнения сделало вытеснение нефти водой из пластов основным процессом разработки нефтяных месторождений.

Несмотря на кажущуюся простоту этого процесса, его количественное описание вызывает определенные трудности, связанные главным образом с необходимостью правильного учета реальных свойств пластов. В этом параграфе будут рассмотрены лишь особенности вытеснения нефти водой из пористой среды, а не из пластов в целом.

Согласно одной из наиболее простых схем, вытеснение нефти водой из пористой среды представляется происходящим наподобие тому, как, например, вода, подаваемая снизу в вертикально поставленную трубу, замещает находившуюся там ранее более легкую, чем вода, жидкость. Такое вытеснение получило название «поршневого». Однако эксперименты и опытные данные о фактической разработке нефтяных месторождений показали, что вытеснение нефти водой даже из достаточно однородных пористых сред является неполным. Тем более неполным оказывается вытеснение нефти водой из реальных неоднородных пластов. Несмотря на это, представление о поршневом характере вытеснения нефти водой с учетом неполноты замещения нефти водой может быть использовано при определенных расчетах.

Развитие исследований процесса вытеснения нефти водой показало, что при этом процессе нефть и вода движутся в пористой среде совместно. Следовательно, даже в однородной среде не существует четкого разграничения областей движения нефти и воды, а образуется занятая водой область, в которой имеется как подвижная вода, так и подвижная нефть, по крайней мере в определенной части заводненной области.

При изучении и расчете совместного движения воды и нефти или другой не смешивающейся с водой жидкости прежде всего нужно

знать закон совместного движения — закон фильтрации неоднородных жидкостей. Естественно предположить, что в этом случае выполняется основное положение Дарси о линейной связи скорости фильтрации и градиента давления. Однако при наличии в пористой среде двух несмешивающихся жидкостей («фаз») на скорость фильтрации оказывают влияние не только градиент давления, абсолютная проницаемость и вязкость жидкости, но и величина насыщенности пористой среды одной из движущихся фаз. При наличии в пористой среде не смешивающихся друг с другом жидкостей давления в различных жидкостях также различны. Поэтому под градиентом давления следует, вообще говоря, понимать градиент давления в соответствующей жидкости.

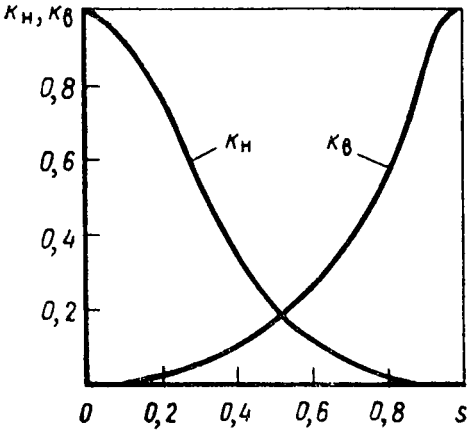


Рис. 49. Относительные проницаемости $k_н$ и $k_в$

В области изучения механизма вытеснения нефти водой из пористых сред имеется обширная литература. Современное представление о совместной фильтрации нефти и воды возникло в результате работ Маскета [73], Бакли и Леверетта [134], Раппопорта и Лиса [149], А. М. Пирвердяна [91], И. А. Чарного [119], Д. А. Эфроса и В. П. Оноприенко [129], Ю. П. Борисова [23] и ряда последующих работ других авторов.

По одной из схем процесса фильтрации двух несмешивающихся жидкостей, давление в фазах предполагается одинаковым, а проницаемость различной. Согласно этой схеме, известной как схема Бакли — Леверетта [134], имеем следующие выражения для скорости фильтрации нефти $\vec{v}_н$ и скорости фильтрации воды $\vec{v}_в$:

$$\vec{v}_н = -\frac{k_н^ф}{\mu_н}\operatorname{grad} p; \quad \vec{v}_в = -\frac{k_в^ф}{\mu_в}\operatorname{grad} p. \tag{5.1}$$

Здесь $k_н^ф$, $\mu_н$ — фазовая проницаемость для нефти и вязкость нефти; $k_в^ф$, $\mu_в$ — фазовая проницаемость для воды и вязкость воды.

Фазовые проницаемости $k_н^ф$ и $k_в^ф$ по Бакли и Леверетту считаются зависящими от водонасыщенности пористой среды $s$. Поскольку в порах содержатся только две фазы, насыщенность пор нефтью равна $1 - s$.

Удобнее пользоваться понятием относительных проницаемостей $k_н$ и $k_в$, равных отношению соответствующих фазовых проницаемостей к абсолютной проницаемости $k$. На рис. 49 показаны зависимости $k_н = k_н(s)$ и $k_в = k_в(s)$.

Относительную проницаемость можно было бы рассматривать как проводимость элемента пористой среды, одна часть сечения которого занята одной, а другая часть — другой фазой. Если бы среда была идеальным грунтом, то относительные проницаемости, по-видимому, были бы линейными функциями насыщенности $s$. Однако, как видно из графиков рис. 49, это не так. Объясняется это прежде всего тем, что распределение фаз в пористой среде влияют капиллярные силы и градиенты давления жидкости, причем таким образом, что изменение насыщенности пористой среды не вызывает пропорционального изменения фазовой проницаемости.

Если скорости фильтрации и, следовательно, градиенты давления малы по сравнению с капиллярными силами, то фазы в пористой среде распределяются всякий раз согласно принципу минимума поверхностной энергии системы пористая среда — нефть — вода. Если же скорости фильтрации сравнительно велики, то на распределение фаз в пористой среде влияет параметр $\frac{\sigma}{k \operatorname{grad} p}$ ($\sigma$ — поверхностное натяжение). В более сложных случаях, когда наблюдается влияние многих факторов, фазовые проницаемости зависят сразу от нескольких безразмерных параметров.

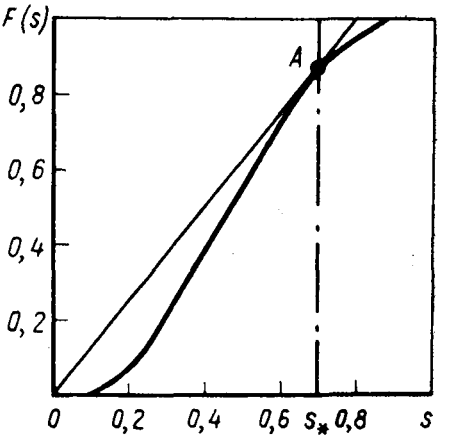


Рис. 50. Функция $F(s)$

Фазовые проницаемости, естественно, зависят от самой структуры пористой среды, особенно от распределения пор по размерам, смачиваемости пород, составляющих пористую среду водой. Здесь не рассматриваются более сложные формы неоднородности пористой среды, от характеристик которых также могут зависеть фазовые проницаемости.

В схеме Бакли — Леверетта важное значение имеет функция $F(s)$, определяемая следующим образом:

$$F(s) = \frac{k_в}{k_в + \frac{\mu_в}{\mu_н} k_н}. \qquad (5.2)$$

На рис. 50 показана функция $F(s)$ при $\mu_в/\mu_н = 1$.

Схема Бакли — Леверетта дает простое решение в случае одномерного прямолинейного вытеснения нефти водой из пористой среды. Для описания процесса вытеснения нефти водой в этом случае

используются уравнения неразрывности фаз:

$$\frac{\partial v_в}{\partial x} + m\frac{\partial s}{\partial t} = 0;$$
$$\frac{\partial v_н}{\partial x} - m\frac{\partial s}{\partial t} = 0. \tag{5.3}$$

Складывая (5.3), получаем

$$\frac{\partial (v_н + v_в)}{\partial x} = 0, \quad v_н + v_в = v = \text{const}. \tag{5.4}$$

Из приведенных выше соотношений получается следующее уравнение:

$$F'(s) v \frac{\partial s}{\partial x} + m\frac{\partial s}{\partial t} = 0. \tag{5.5}$$

В процессе вытеснения нефти водой насыщенность $s$ в какой-либо фиксированной точке пласта изменяется. Вместе с тем точки, в которых насыщенность равна какому-либо фиксированному значению, перемещаются со временем в направлении движения жидкостей. Рассматривая движение точки $x$ с некоторой насыщенностью $s = \text{const}$, называемой характеристикой, получаем следующее решение уравнения (5.5):

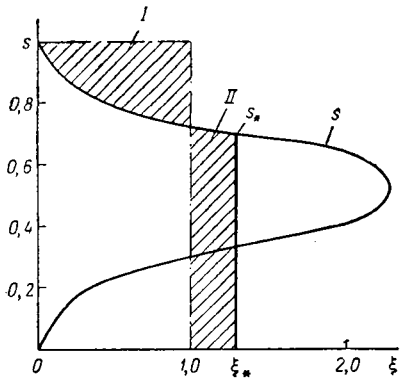



Рис. 51. Распределение насыщенности $s = s(\xi)$

$$mx = vF'(s)t. \tag{5.6}$$

Из (5.6) видно, что в момент времени $t = 0$ все характеристики сходятся в точку $x = 0$. Задаваясь значением времени $t$ и зная также величины $m$ и $v$, из формулы (5.6) определяем координату $x$, где насыщенность равна $s$.

Профиль насыщенности лучше представить в виде зависимости $s$ от безразмерной координаты $\xi = mx/vt$ (рис. 51). Из рис. 51 видно, что насыщенность в каждой точке $x$ в каждый момент времени $t$ является двузначной, чего, конечно, физически быть не может Это показывает, что зависимость насыщенности от координаты $\xi$ справедлива только до некоторого значения $\xi = \xi_*$, и, если пористая среда до начала вытеснения из нее нефти водой содержала только нефть, при $\xi = \xi_*$ значение $s$ будет изменяться скачком от $s = s_*$ до $s = 0$. Безразмерная величина $\xi = \xi_*$ является координатой «фронта вытеснения». Координата фронта вытеснения определяется из баланса закачанной в пласт воды и вытесненной оттуда нефти. Обозначая $V$ объем вошедшей в пласт воды, имеем

$$V = mbh\int_0^{x_*} s(x)\,dx, \tag{5.7}$$

где $bh$ — площадь сечения пласта, или

$$\int_0^{\xi_*} s(\xi)\,d\xi = 1. \tag{5.8}$$

Если проницаемость для нефти $k_н(s)$ отличается от нуля при $s \to 1$, то в принципе можно считать, что при $\xi = 0$ $s = 1$.

Если же при $s \to 1$ $k_н(s) = 0$, то на границе $\xi = 0$ установится некоторая насыщенность $s_0 \neq 1$. Поскольку из (5.6) $\xi = F'(s)$, то, принимая, что $s = 1$ при $\xi = 0$, получаем

$$\int_1^{s_*} sF''(s)\,ds = 1. \tag{5.9}$$

Раскрывая (5.9) и полагая $F'(1) = 0$, $F(1) = 1$, имеем

$$\int_1^{s_*} sF''(s)\,ds = s_*F'(s_*) - F(s_*) + 1. \tag{5.10}$$

Отсюда, с учетом (5.9) получаем уравнение для определения $s_*$:

$$s_* = \frac{F(s_*)}{F'(s_*)}. \tag{5.11}$$

Величину $s_*$, как это видно из (5.11), можно легко определить графически. Для этого достаточно на графике $F(s)$ провести из начала координат касательную к кривой $F(s)$ и тогда абсцисса точки касания $A$ будет равна $s_*$ (см. рис. 50).

Другой графический способ определения величины $s_*$ состоит в том, что, как это следует из (5.8), площадь на графике $s = s(\xi)$, заключенная между ординатой $\xi = 0$, абсциссой $s = 0$, кривой $s = s(x)$ на участке $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_*$ и вертикальной линией скачка насыщенности $\xi = \xi_*$, должна быть равна единице. Поскольку $s(0) = 1$, для графического определения $\xi_*$ и $s_*$ достаточно приравнять площади $I$ и $II$ на рис. 51. Жирной линией на рис. 51 показано изменение водонасыщенности $s$ в зависимости от безразмерной координаты $\xi$.

Процесс вытеснения нефти водой по схеме Бакли —Леверетта со скачкообразным изменением водонасыщенности в определенном смысле похож на процесс течения газа с образованием ударных волн.

Известно, что небольшие изменения давления в газе распространяются со скоростью звука, пропорциональной корню квадратному из давления газа, деленному на его плотность. Значительные же сжатия газа распространяются в виде ударных волн, на фронте которых наблюдаются скачкообразное изменение давления газа, его плотности и скорости. При этом до скачка и после скачка сохраняются масса газа, его импульс и энергия.

При распространении ударных волн в качестве уравнения состояния оказывается справедливой адиабата Гюгонио, согласно которой плотность газа возрастает лишь до определенной конечной величины даже при неограниченном увеличении давления, но при этом может неограниченно возрастать температура газа.

Образование скачков насыщенности при вытеснении нефти водой можно объяснить тем, что в соответствии с характером функции $F(s)$ скорость движения воды в области с большей водонасыщенностью намного выше скорости движения воды в области с меньшей водонасыщенностью. Поэтому получается, что в некоторой точке пласта должны существовать как бы две скорости движения воды, одна из которых намного больше другой, что невозможно. В результате вода, поступающая из заводненной области, накапливается перед незаводненной областью, т. е. образуется скачок водонасыщенности, который распространяется с определенной скоростью.

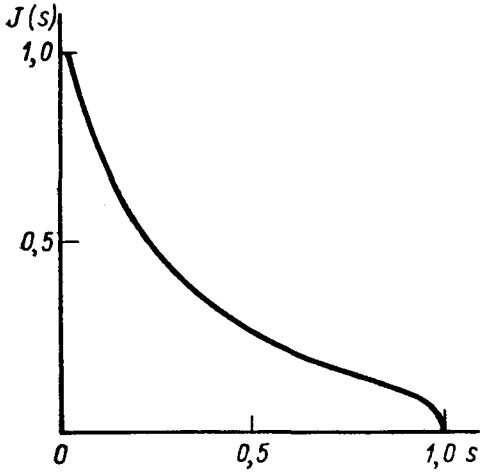


Рис. 52. Функция $J(s)$

При течениях газа с образованием ударных волн давление в газе, в соответствии с адиабатой Гюгонио, может значительно возрастать при сравнительно небольшом увеличении его плотности. Поэтому скорости распространения более сильных сжатий в газе резко возрастают, оказываются намного выше скорости звука в невозмущенной области и более сильные сжатия «нагоняют» менее сильные. Отсюда и образуется скачок давления газа, его плотности и скорости. Ударные волны возникают только при распространении сжатия газа. Ударных волн разрежения не бывает, так что разрежение газа происходит по обычной адиабате, а не по адиабате Гюгонио.

Схема Бакли — Леверетта, учитывая различные фазовые проницаемости для нефти и воды, зависящие определенным образом от капиллярных сил, все же не позволяет описать такие процессы фильтрации несмешивающихся жидкостей, когда само движение жидкостей обусловливается действием капиллярных сил. Позволяет это сделать наиболее известная и экспериментально обоснованная к настоящему времени схема Раппопорта — Лиса [149], которая и будет изложена ниже. Согласно этой схеме, в закон движения фаз вводятся два давления — давление в нефти $p_н$ и давление в воде $p_в$. Принимается, что порода является гидрофильной и разность между давлением в нефти и воде равна капиллярному давлению. Зависимо-

сти капиллярного давления $p^к$ от насыщенности $s$ обычно представляют в виде:

$$p^к(s) = p_н - p_в = \frac{2\sigma\cos\theta}{\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}} J(s), \qquad (5.12)$$

где $J(s)$ — функция Леверетта; $\theta$ — угол смачивания пористой среды водой.

На рис. 52 показана зависимость $J(s)$, определенная экспериментально.

Без представления о капиллярном давлении нельзя объяснить, например, явления противоточной капиллярной пропитки, наблюдающегося в породах — коллекторах нефти и газа. Экспериментально это явление исследовали А. А. Кочешков, М. М. Кусаков и Н. М. Лубман [58], Маттакс и Кайт [145], Н. Д. Таиров, Д. М. Везиров, Ф. Г. Керимова [105] и др. Если образец гидрофильной пористой среды (рис. 53), первоначально насыщенный нефтью, поместить в воду, то заключенная в его порах нефть начнет замещаться водой. Нефть будет выходить из образца, всплывая на поверхность воды.

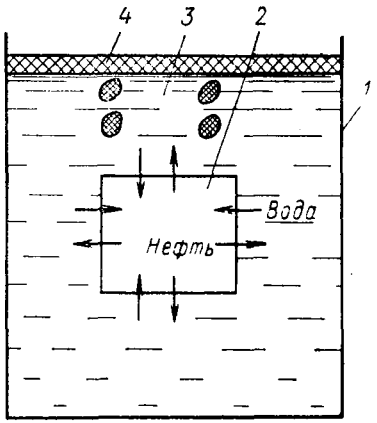



**Рис. 53. Противоточная капиллярная пропитка нефтенасыщенной пористой среды:**

*1* — сосуд; *2* — образец; *3* — вода; *4* — пленка нефти

Кроме противоточной капиллярной пропитки, может происходить также прямоточная пропитка (рис. 54), когда насыщенный нефтью образец гидрофильной пористой среды впитывает воду с одного конца, а нефть выходит из образца с другого конца. Показанная на рис. 52 зависимость $J(s)$ получена при капиллярном впитывании воды в образец пористой среды, ранее насыщенный нефтью. Может наблюдаться комбинированная (прямоточно-противоточная) пропитка.

Согласно схеме совместной фильтрации нефти и воды, учитывающей движение фаз под действием капиллярных сил, напишем закон движения фаз в следующем виде:

$$\vec{v}_н = -\frac{k^ф_н}{\mu_н}\operatorname{grad} p_н, \quad \vec{v}_в = -\frac{k^ф_в}{\mu_в}\operatorname{grad} p_ь. \qquad (5.13)$$

На основе уравнений неразрывности фаз (5.3), связи между фазовыми давлениями (5.12) и закона движения фаз (5.13) получается следующее уравнение, описывающее изменение водонасыщенности $s$

в пористой среде при совместной фильтрации нефти и воды в одномерном случае:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(s) \frac{k_{\text{н}}^{\Phi}(s)}{\mu_{\text{н}}} \frac{\partial p^{\text{к}}(s)}{\partial x} + m \frac{\partial s}{\partial t} = 0. \tag{5.14}$$

В качестве примера использования уравнения (5.14) рассмотрим процесс противоточной капиллярной пропитки гидрофильной пористой среды при одномерном прямолинейном движении. Для этого процесса имеем следующее условие:

$$v_{\text{н}} + v_{\text{в}} = 0. \tag{5.15}$$

Как показано В. М. Рыжиком [18], уравнение (5.14) при определенных предположениях может быть сведено к уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 s^n}{\partial x^2}. \tag{5.16}$$

Уравнения типа (5.16) имеют решения, зависящие от одной переменной (автомодельные решения) вида

$$s = s(\xi), \quad \xi = \frac{x}{at^{1/2}}. \tag{5.17}$$

Г. И. Баренблаттом [18] было показано, что для этих решений характерна конечная скорость распространения фронта возмущения (в данном случае — «фронта капиллярной пропитки», на котором

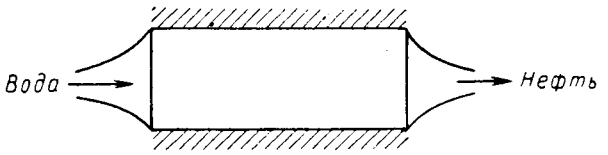



**Рис. 54. Прямоточная капиллярная пропитка**

водонасыщенность равна начальной водонасыщенности в пласте). Координате фронта пропитки $x_*$ соответствует значение $\xi = \xi_*$. Из (5.17) следует, что координата фронта пропитки будет продвигаться во времени по закону

$$x_* = \xi_* t^{1/2}. \tag{5.18}$$

Значит, скорость продвижения этого фронта будет пропорциональна $t^{-1/2}$.

Полное решение задачи о капиллярной пропитке может быть получено путем численного счета.

Можно рассмотреть процесс капиллярной пропитки и более упрощенно, приняв следующие приближенные зависимости:

$$p^{\text{к}} = p_*^{\text{к}}(1 - s); \quad \mu_{\text{в}} = \mu_{\text{н}} = \mu;$$
$$k_{\text{н}}^{\Phi} = k(1 - s); \quad k_{\text{в}}^{\Phi} = ks; \quad p_*^{\text{к}} = \text{const}. \tag{5.19}$$

Тогда, используя одно из уравнений неразрывности (5.3), а также формулы (5.13), (5.14) и (5.19), получим следующее приближенное уравнение, описывающее изменение насыщенности в пористой среде:

$$m\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{kp_*^{\text{к}}}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}s(1-s)\frac{\partial s}{\partial x}. \tag{5.20}$$

Далее, линеаризуя (5.20), получаем уравнение

$$m\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{kp_*^{\text{к}}}{6\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \tag{5.21}$$

Для скорости фильтрации имеем, в соответствии с принятыми выше допущениями, выражение

$$\vec{v}_{\text{в}}=-\frac{kp_*^{\text{к}}}{6\mu}\frac{\partial s}{\partial x}. \tag{5.22}$$

Считая, что образец имеет очень большую длину, а также полагая $s\ (0,\ t)\approx 1$, получаем на основе известного решения уравнения теплопроводности следующее выражение для скорости фильтрации $v_{\text{в}}$ при $x=0$ (скорости противоточной капиллярной пропитки):

$$v_{\text{в}}(0,\ t)=\frac{kp_*^{\text{к}}}{\mu}(6\pi)^{-1/2}\left(\frac{kp_*^{\text{к}}t}{m\mu}\right)^{-1/2}. \tag{5.23}$$

По экспериментальным данным

$$v_{\text{в}}(0,\ t)\sim\left(\frac{\sigma\cos\Theta\sqrt{\frac{k}{m}}S_{\text{у}}^2 t}{\mu}\right)^{-1/2}, \tag{5.24}$$

где $S_{\text{у}}$ — удельная поверхность пористой среды.

Как видно из сравнения (5.23) и (5.24), выражения для скорости капиллярной пропитки, полученные теоретически и экспериментально аналогичны, если, например, принять

$$p_*^{\text{к}}=\frac{\sigma\cos\Theta S_{\text{у}}^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^{1/2}}. \tag{5.25}$$

Использование схемы двухфазной фильтрации Раппопорта — Лиса для описания процесса вытеснения нефти водой из прямолинейного образца пористой среды не приводит к появлению скачка насыщенности или резко обозначенного фронта вытеснения, как это было при использовании схемы Бакли — Леверетта. Изменение насыщенности по всей длине образца происходит постепенно. Выше были рассмотрены такие случаи вытеснения нефти водой из пористых сред, когда фазовые проницаемости и капиллярное давление зависят только от мгновенной насыщенности. Однако, как это было указано Г. И. Баренблаттом [18], в пористой среде могут наблюдаться процессы перераспределения нефти и воды, которые приводят к изменению во времени фазовых проницаемостей и капиллярного давления и, следовательно, к изменению интегральных показателей процесса вытеснения нефти водой.

## § 6. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В НЕОДНОРОДНЫХ И ТРЕЩИНОВАТЫХ ПЛАСТАХ

Неоднородность реальных пластов весьма разнообразна. Вместе с тем из всех форм неоднородности, пожалуй, можно выделить, как наиболее характерные, две формы — слоистость и трещиноватость. В свою очередь слоистые пласты могут быть представлены либо сообщающимися между собой прослоями, либо практически совершенно несообщающимися. Гидродинамические модели пластов с несообщающимися прослоями в настоящее время широко используются при расчетах процессов вытеснения нефти водой. Использование этих моделей при проектировании и анализе разработки нефтяных месторождений изложено в известном руководстве по разработке нефтяных месторождений А. П. Крылова и др. [94]. В моделях, развитых в работах Ю. П. Борисова [23], М. М. Саттарова [101], Б. Т. Баишева [10] и др., пласт принимается состоящим из большого числа не сообщающихся между собой пропластков, фильтрационные свойства которых подчиняются статистическому распределению в соответствии с законами Гаусса, Максвелла и др.

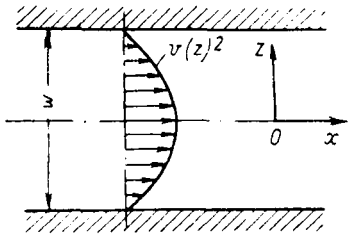


Рис. 55. Распределение скорости вязкой жидкости в щели

М. И. Швидлером [121] предложены общие статистические модели для описания процессов разработки реальных пластов.

Гидродинамические модели пластов, состоящих из сообщающихся друг с другом пропластков, рассматривались А. Н. Мятиевым [81], П. Я. Полубариновой-Кочиной [93], М. А. Гусейн-Заде [37] и др. Использование численных методов при решении задач разработки неоднородных пластов изложено в работе Г. Г. Вахитова [26]. Процессы вытеснения моделей нефти водой из моделей слоистых пластов изучались экспериментально В. Г. Оганджанянцем [86].

Следует отметить, что механизм многих внутрипластовых процессов, происходящих в сообщающихся друг с другом слоистых пластах, сходен с механизмом аналогичных процессов, происходящих в порово-трещиноватых коллекторах.

Трещиноватость является одним из очень распространенных свойств нефтяных и газовых пластов. Горные породы, в частности коллекторы нефти и газа, в течение геологических времен испытывали различного рода деформации и физико-химические превращения. Многие горные породы не обладают достаточной текучестью, которая при деформации пород вызывала бы релаксацию напряжений. Поэтому напряжения, которые возникали в породах при движениях земной коры или при физико-химических превращениях пород, превышали пределы прочности пород и вызывали появление трещин. В настоящее время имеются многочисленные прямые и косвенные

данные о наличии трещин в нефтяных, газовых и угольных пластах.

Движение жидкостей и газов, и в особенности многофазных веществ, в трещиноватых пластах обладает целым рядом особенностей. Рассмотрение этих особенностей начнем с примера движения однородной жидкости в трещиноватом и трещиновато-пористом пласте, т. е. в таком пласте, который состоит из пористого материала, разбитого равномерно или хаотично системой трещин.

Однако прежде чем перейти к рассмотрению движения жидкости в этих пластах, уделим внимание вопросу движения вязкой жидкости в щели. Закон движения вязкой жидкости в прямолинейной щели с параллельными стенками (рис. 55) получается из решения уравнений движения вязкой жидкости (уравнений Навье — Стокса) и имеет вид:

$$\vec{v} = -\frac{w^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (6.1)$$

где $\vec{v}$ — вектор осредненной по ширине щели скорости движения жидкости; $w$ — ширина трещины; $\mu$ — вязкость нефти; $\partial p/\partial x$ — градиент давления.

Имеются экспериментальные данные [67], показывающие, что зависимость между скоростью и градиентом давления (6.1) выполняется до определенных значений числа Рейнольдса:

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{vw\rho}{\mu} = \frac{q\rho}{\mu}$$

($q$ — расход жидкости в щели, приходящийся на единицу ее ширины, измеряемой в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 55). При значениях $N_{\mathrm{Re}}$, примерно бóльших 500, закон движения (6.1) перестает быть справедливым, так как движение в щели становится турбулентным.

Известны также экспериментальные данные [98], согласно которым закон (6.1) при ламинарном течении выполняется для очень узких щелей, шириной в несколько микрон.

Сравнивая формулу (6.1) с законом Дарси, можно получить выражение для «проницаемости» единичной трещины $k = w^2/12$. Эта проницаемость очень велика. Так, например, при $w = 10^{-3}$ см $k \approx 10^{-7}$ см$^2 = 10$ Д. Однако такую проницаемость имеют лишь отдельно взятые трещины. Практически же таких трещин в породе немного, и поэтому суммарная проницаемость трещиноватой породы может оказаться не такой большой. Так, например, если на один квадратный метр фильтрующей поверхности пласта приходится одна трещина шириной $w = 10^{-3}$ см, а проницаемость самой породы равна нулю, то эффективная проницаемость такой породы будет равна всего 0,1 мД.

Следовательно, рассматривая трещиноватую породу как фильтрующую среду, нужно определить проницаемость трещиноватой породы в целом.

Прежде чем это сделать, введем понятия густоты и средней ширины трещин. Под густотой трещин $\Gamma_т$ будем понимать отношение *полной длины* $\Delta\Sigma l_i$ *всех трещин, находящихся в данном сечении* трещиноватой породы, к удвоенной площади сечения $\Delta S$. Таким образом,

$$\Gamma_т = \frac{\Delta \sum l_i}{2\Delta S}. \tag{6.2}$$

Если сетка трещин квадратная (рис. 56), то $\Gamma_т = 1/l$. Отсюда определяется и «средняя длина трещины» $l_*$, равная также «среднему размеру блока породы». Имеем

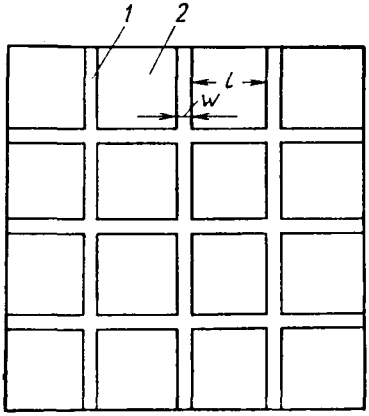



Рис. 56. Трещиноватая среда:
*1* — трещины; *2* — блоки породы

$$l_* = \frac{1}{\Gamma_т}. \tag{6.3}$$

Средняя физическая ширина трещин $w_* = \Delta\Sigma w_i/\Delta n$ ($w_i$ — ширина $i$-й трещины, $\Delta n$ — число трещин в сечении $\Delta S$). Среднюю гидравлическую ширину трещин определяют, исходя из гидравлического параметра — проводимости системы трещин.

Основываясь на представлении о квадратной сетке трещин (можно, конечно, использовать и другие геометрические представления), получаем для осредненной по сечению $\Delta S$ (см. рис. 56) скорости фильтрации жидкости в среде с чисто трещинной пористостью следующую формулу [50]:

$$\vec{v} = \frac{\Delta q}{\Delta S} = -\frac{w_*^3 \Delta \sum l_i}{12\mu \Delta S} \underset{\Delta S \to 0}{\operatorname{grad}} p = -\frac{w_*^3 \Gamma_т}{6\mu} \operatorname{grad} p. \tag{6.4}$$

Выражение (6.4) можно считать законом движения (фильтрации) жидкости в среде с чисто трещинной пористостью и проницаемостью.

Ширина трещин в трещиноватых породах может существенно зависеть от давления жидкости, действующего на поверхность трещины. Поэтому трещиноватый пласт вообще следует считать деформируемой средой. Развитию теории фильтрации жидкостей и газов в деформируемых коллекторах посвящены работы А. Бана, К. С. Басниева, В. Н. Николаевского [11], А. Т. Горбунова и В. Н. Николаевского [34] и др. В работах [4, 34] широко используется экспоненциальная зависимость пористости и проницаемости пород от давления. Однако в первом приближении для описания деформации трещиноватых пород можно использовать следующую зависимость:

$$w_* = w_{*0}[1 - \beta_*(p_к - p)], \tag{6.5}$$

где $w_{*0}$ — ширина трещины при давлении $p$ жидкости в трещине, равном начальному давлению $p_к$; $\beta_*$ — «сжимаемость» трещины.

Величина $\beta_*$ в зависимости от структуры трещиноватой среды может существенно отличаться от сжимаемости материала блоков породы, т. е. от сжимаемости самих пород, слагающих трещиноватый коллектор. Чтобы пояснить это, рассмотрим в качестве примера фильтрующее сечение трещиноватого пласта, содержащего горизонтальные трещины со средней шириной $w_*$ и длиной $l_*$ (рис. 57). Будем считать вначале, что трещины длинные и узкие, т. е. что $l_* > w_*$. Пласт сверху сжат горным давлением $q_г = \rho_п g H$, а с боков — боковым давлением $q_\infty$. Давление жидкости в трещинах равно $p$. При изменении давления жидкости в трещинах поверхности трещин

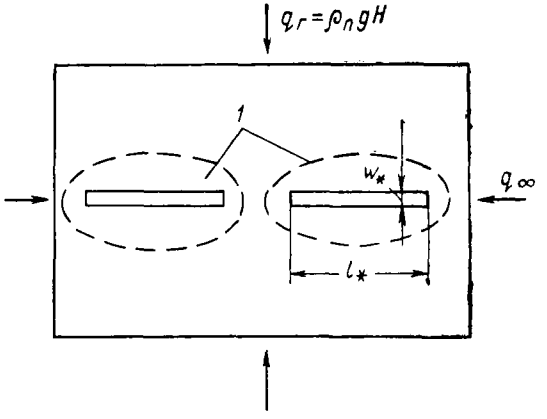



**Рис. 57. Деформация трещин:**
*1 — области существенных деформаций*

выпучиваются, деформируясь. Среднее перемещение $\Delta y$ поверхности трещины по вертикали согласно закону Гука выражается, как

$$\Delta y = \beta_п l_* \Delta p, \tag{6.6}$$

где $\beta_п$ — сжимаемость материала блоков.

Изменение же объема трещины $\Delta V$ пропорционально длине трещины $l_*$ и толщине блока $b$, замеренной в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 57, так что

$$\Delta V = \beta_п l_*^2 b \Delta p. \tag{6.7}$$

«Сжимаемость» трещины $\beta_*$ определим теперь по формуле

$$\beta_* = \frac{\Delta V}{V \Delta p}. \tag{6.8}$$

Поскольку $V = w_* l_* b$, из (6.7) и (6.8) имеем [50]

$$\beta_* = \beta_п \frac{l_*}{w_*}. \tag{6.9}$$

Если $l_*/w_* = 10$, то $\beta_* = 10\beta_п$, а при $l_*/w_* = 100$ «сжимаемость» трещин будет чрезвычайно высокой и поэтому будет оказывать существенное влияние на проводимость трещиноватого пласта.

Наоборот, при малых $l_*/w_*$, практически равных единице, деформация трещин будет незначительной. Пласты с малым $l_*/w_*$ скорее можно назвать кавернозными, чем трещиноватыми, поскольку пустоты в них более похожи на каверны, чем на трещины. Если к тому же количество таких «каверн» в сечении пласта мало, то при изменении давления жидкости в них деформация будет практически распространяться на область, находящуюся вблизи каверны (область *1* на рис.57), а не на всю породу, так что эффективная сжимаемость от изменения давления жидкости такого кавернозного пласта может быть даже меньше сжимаемости материала, из которого состоят блоки породы.

Представления о сжимаемости трещиноватых пород изложены также в работе [69].

Однако вернемся к первому случаю трещиноватого пласта с чисто трещинной пористостью, для которого $l_* \gg w_*$.

Принимая (6.4) в качестве закона фильтрации с учетом (6.5), а также используя обычное уравнение неразрывности потока, можно получить дифференциальное уравнение движения жидкости в сильно деформируемой среде с чисто трещинной пористостью. В случае установившегося движения жидкости в такой среде это уравнение имеет следующий вид:

$$\operatorname{div} f^3(p) \operatorname{grad} p = 0;$$

$$f(p) = 1 - \beta_*(p_к - p). \tag{6.10}$$

В случае, например, установившегося радиального движения жидкости в среде с чисто трещинной пористостью от контура пласта радиусом $r_к$ к скважине радиусом $r_с$ имеем следующую формулу [50], определяющую дебит скважины:

$$q = \frac{2\pi k_т h}{\mu \ln \frac{r_к}{r_с}} \left[ \frac{(a + bp_к)^4 - (a + bp_с)^4}{4b} \right]; \tag{6.11}$$

$$a = 1 - \beta_* p_к; \quad b = \beta_*; \quad k_т = \frac{w_*^3 \Gamma_т}{6}.$$

Из (6.11) видно, что для скважины, эксплуатирующей трещиноватый пласт с сильной сжимаемостью трещин, уже не получается пропорциональной зависимости между дебитом скважины и перепадом давления, как это имеет место в случае скважины, эксплуатирующей обычный слабо сжимаемый пористый пласт.

Зависимости $q = q(\Delta p_с)$ при использовании формулы (6.11) получаются криволинейными, загибающимися к оси перепадов давления.

Теперь перейдем к рассмотрению движения однофазной жидкости в трещиновато-пористом пласте. Будем рассматривать трещиновато-пористые пласты со слабой сжимаемостью.

В трещиновато-пористом пласте емкостью и проводимостью обладают как блоки породы, так и сами трещины. Выше было показано, что если блоки породы непроницаемые, то систему трещин можно считать своеобразной фильтрующей средой. Уравнение неустановившегося движения однородной жидкости в такой среде (в случае, конечно, слабой сжимаемости среды) будет вполне аналогичным уравнению движения однородной жидкости в обычной пористой среде, т. е. уравнению типа теплопроводности. Если же трещины в трещиновато-пористом пласте каким-то образом сделать непроницаемыми в продольном направлении, но проницаемыми в поперечном направлении, то, учитывая, что объем трещин обычно невелик по сравнению с поровым объемом блоков, трещиновато-пористый пласт превратится практически в обычную пористую среду. Таким образом, трещиновато-пористая среда может в пределе «превращаться» как в среду с чисто трещинной пористостью, так и в обычную пористую среду. В общем же случае эта среда содержит признаки как пористой, так и чисто трещинной среды.

Поэтому при математическом описании движения однородной жидкости в трещиновато-пористой среде естественно представить эту среду в виде «вложенных» друг в друга пористой и трещинной сред [15]. При установившемся движении жидкости в трещиновато-пористой среде эта среда будет вести себя как среда, проводимость которой равна сумме проводимостей пористой и трещинной сред. Если же движение жидкости в трещиновато-пористой среде неустановившееся, вступит в действие явление обмена жидкостью между системой блоков и системой трещин.

Для математического описания движения жидкости в трещиновато-пористой среде можно ввести два понятия скорости фильтрации — скорость фильтрации в системе трещин $\vec{v}_1$ и скорость фильтрации в системе блоков $\vec{v}_2$; два давления — давление в системе трещин $p_1$ и давление в блоках $p_2$, как это сделано в работе [15].

Принимая, что обмен жидкостью между блоками и трещинами происходит квазистационарно, т. е. явно не зависит от времени $t$, получаем следующую формулу для скорости $v$ этого обмена в элементарном объеме пласта [15, 16]:

$$v = \frac{\alpha}{\mu}(p_2 - p_1), \tag{6.12}$$

где $\alpha$ — коэффициент, характеризующий интенсивность обмена жидкостью между системой блоков и системой трещин.

Из физических соображений следует [16], что коэффициент $\alpha$ должен зависеть от проницаемости блоков и их геометрической характеристики, в качестве которой выберем удельную поверхность блоков $S_y$, равную отношению поверхности блоков и их объему.

Коэффициент $\alpha$ безразмерный, поэтому $\alpha \approx k_2 S_y^2$. Считая блоки породы кубами со стороной $a$, имеем $\alpha = 36\, k_2/a^2$. Пусть $a = 1$ м $=$ $= 100$ см, $k_2 = 10$ мД $= 10^{-10}$ см$^2$. Тогда $\alpha = 0{,}36 \cdot 10^{-12}$.

Уравнения неразрывности течения однородной жидкости в трещиновато-пористой среде в соответствии со сказанным выше имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (m_1\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}_1) - \rho v = 0; \\ \frac{\partial (m_2\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}_2) + \rho v = 0, \end{aligned} \tag{6.13}$$

где $m_1$ и $m_2$ — пористости системы трещин и блоков; $\rho$ — плотность жидкости.

Принимая зависимости скоростей фильтрации в трещинах и блоках от соответствующих градиентов давлений в форме закона Дарси, из (6.12) и (6.13) получаем замкнутую систему уравнений, описывающих движение однородной жидкости в трещиновато-пористой среде.

Закон обмена жидкостью между блоками и трещинами может быть представлен, конечно, и в форме, явно учитывающей нестационарность, т. е. зависимость от времени, этого процесса. Такой закон обмена жидкостью между блоками и трещинами был введен И. А. Волковым [27] и В. С. Кутляровым [63]. Укажем также формулу обмена между блоками и трещинами, полученную в работе [49] без использования понятия давления в блоках $p_2$. Помня, что изменение этого давления происходит в результате накопления или расходования жидкости в блоках из-за перетока из трещин в блоки или наоборот, с использованием (6.12) получаем [49]:

$$v = \frac{\alpha}{\mu}\left(p_0 - p - \frac{1}{\beta_2}\int_0^t v\, d\tau\right), \tag{6.14}$$

где $p_0$ — начальное давление в трещинах; $\beta_2$ — упругоемкость блоков.

Систему уравнений (6.12)—(6.13) можно также считать системой уравнений движения однородной жидкости в среде с двойной пористостью и использовать эту систему для описания соответствующего течения жидкости в пористом пласте с сильно развитой литологической неоднородностью.

При использовании уравнений (6.12)—(6.13) применительно к трещиновато-пористой среде в ряде случаев можно сделать дальнейшие упрощения уравнений. Так, например, при большой проводимости трещин по сравнению с проводимостью блоков распределение давления в них можно считать квазистационарным, а также считать, что блоки являются своего рода «источниками», питающими систему трещин. Тогда уравнения (6.12)—(6.13) упростятся и примут следующий вид [15, 16]:

$$\begin{aligned} k_1 \nabla^2 p_1 + \alpha (p_2 - p_1) = 0; \\ \beta_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\alpha}{\mu}(p_2 - p_1) = 0. \end{aligned} \tag{6.15}$$

При исключении из уравнений (6.15) давления $p_2$ получаем одно уравнение [16]

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{k_1}{\alpha}\frac{\partial \nabla^2 p_1}{\partial t} = \frac{k_1}{\mu\beta_2}\nabla^2 p_1. \tag{6.16}$$

В качестве примера, наглядно демонстрирующего эффект обмена жидкостью между блоками и трещинами, покажем, как происходит движение жидкости в трещиновато-пористом пласте конечных размеров (рис. 58). В начальный момент времени в этом пласте движение жидкости было установившимся. Из уравнения (6.16) следует, что распределение давления в этом случае описывается уравнением Лапласа и, конечно, имеем $p_2 = p_1$.

При установившемся движении в пласте давление $p_1 = p_к$ при $x = l$, а при $x = 0$ и $p_1 = P_1$.

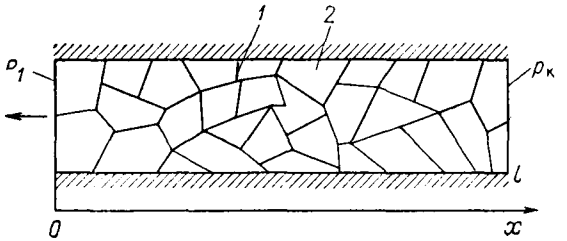



Рис. 58. Трещиновато-пористый пласт:
*1* — трещины; *2* — блоки пористой породы

Введем безразмерные координаты

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{k_1 t}{\mu\beta_2 l^2}. \tag{6.17}$$

Начальные и граничные условия следующие:

$$p_1 = P_1 + (p_к - P_1)\xi \text{ при } \tau = 0;$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_1(\tau, 0)}{\partial \xi} &= 0 \\ p_1(\tau, 1) &= p_к \end{aligned}\right\} \text{ при } \tau > 0. \tag{6.18}$$

Решением уравнения (6.16) при условии (6.18) будет [50]

$$p_1 = p_к - \frac{8(p_к - P_1)}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\exp\left[-\frac{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}\tau}{1+\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}\frac{\eta}{l^2}}\right]\times$$

$$\times\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}\xi, \quad \eta = \frac{k_1}{\alpha}. \tag{6.19}$$

При $\eta = 0$ распределение давления $p_1$ совпадает с распределением давления при движении жидкости в аналогичном случае в обычной пористой среде. На рис. 59 показана зависимость функции $\frac{p_к - p_1(0,\tau)}{p_к - p_1}$ от безразмерного времени $\tau$ при $\eta/l^2 = 1$, $\eta/l^2 = 5$ и $\eta/l^2 = 10$.

Заметим, что случай $\eta/l^2 = 1$ может соответствовать, например, $k_1 = 1$ Д, $k_2 = 10^{-4}$ Д, линейному размеру блока 6 м и $l = 100$ м.

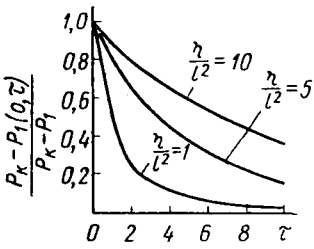



Рис. 59. Зависимость $[p_к - p_1(0, \tau)/p_к] - p_1$ от $\tau$ при различных $\eta/l^2$

Таким образом, чем больше $\eta$, тем больше отличается изменение давления в трещиновато-пористом пласте от изменения давления в обычном пористом пласте.

При быстром изменении давления на границе трещиновато-пористого пласта давление в трещинах в непосредственной близости от границы пласта принимает значение, близкое к давлению на границе пласта. Давление же в блоках $p_2$ вблизи границы пласта может, как это следует непосредственно из (6.15), существенно отличаться от давления в трещинах $p_2$. Разность давлений в блоках и трещинах вблизи границы пласта — «скачок давления» [18] уменьшается со временем по экспоненциальному закону.

## § 7. ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ВОДОЙ ИЗ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОГО ПЛАСТА

Механизм движения однородных и неоднородных жидкостей, а также газа и газированных жидкостей в трещиновато-пористых пластах в настоящее время изучен в соответствии с приведенными выше представлениями об этих пластах. Изложение решений задач движения жидкостей в трещиновато-пористых пластах имеется в ряде работ [4, 16, 18, 46].

Большое значение для практики имеет процесс вытеснения нефти водой из трещиновато-пористых пластов. Этот процесс и будет рассмотрен ниже.

Как уже было показано, в тех случаях, когда пористый коллектор нефти является гидрофильным, при контакте воды с этим коллектором происходит капиллярная пропитка. Если пористые блоки хорошо смачиваются водой, то при закачке в трещиновато-пористый пласт воды она вытесняет нефть из трещин, а из блоков породы в трещины поступает нефть за счет капиллярной пропитки.

Рассмотрим трещиновато-пористый пласт, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 60). Если закачивать в этот пласт воду, то она будет поступать в блоки породы за счет капиллярной пропитки.

Экспериментальные данные показывают, что скорость капиллярного впитывания воды (расход воды, впитывающейся в породу в единицу времени, равный расходу нефти, выходящей из породы) можно представить следующим образом [21]:

$$\varphi(\tau) = \frac{A}{2} m_2 s_* \frac{\sigma \cos\theta \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} S_y^2}{\mu_н} \tau^{-1/2}, \qquad (7.1)$$

$$\tau = \frac{\sigma \cos\theta \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} S_y^2 t}{\mu_н},$$

где $A$ — коэффициент, определяемый экспериментальным путем; $k_2$, $m_2$ — проницаемость и пористость блоков породы; остальные

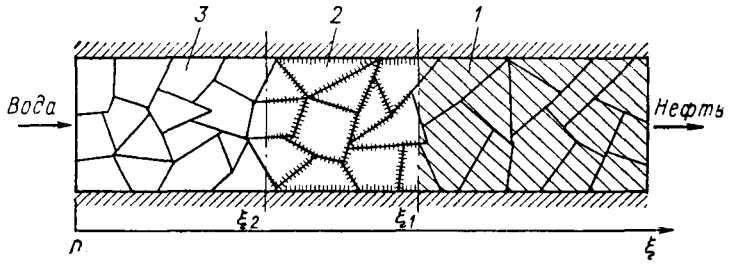



**Рис. 60. Вытеснение нефти водой из трещиновато-пористого пласта:**

*1* — блоки породы, насыщенные нефтью; *2* — блоки породы, пропитываемые водой; *3* — блоки породы, пропитанные водой

обозначения, кроме $s_*$, которое объясняется ниже, уже известны читателю из предыдущего изложения.

В отличие от приведенного выше теоретического решения задачи о капиллярной пропитке в дальнейшем будем предполагать, исходя из чисто практических соображений, что процесс капиллярной пропитки не продолжается бесконечно долго не только из-за того, что сами блоки имеют ограниченные размеры, но и потому, что при больших временах этот процесс идет очень медленно. Поэтому, используя формулу (7.1), примем, что капиллярная пропитка заканчивается к моменту времени $t_*$, когда средняя водонасыщенность блоков составит величину $s_*$. Это предположение не является существенным ограничением излагаемой теории, и в случае надобности может быть принят иной закон капиллярной пропитки.

Ниже будет идти речь о противоточной капиллярной пропитке.

При закачке воды в трещиновато-пористый пласт с расходом $q(\tau)$ процессом капиллярной пропитки охватываются не одновременно все блоки пласта. Поэтому обозначим символом $\lambda(\xi)$ время начала капиллярной пропитки блока породы, находящегося на рас-

стоянии $\xi = x/l_*$ ($l_*$ — размер блока породы) от начала координат. Если капиллярная пропитка блока породы началась в момент времени $\lambda(\xi)$, то скорость капиллярной пропитки этого блока в момент времени $\tau$ равна $\varphi[\tau - \lambda(\xi)]$. Считая, что в каждый момент времени расход воды идет на капиллярную пропитку блоков, получаем [21]

$$\int_0^{\xi(\lambda=\tau)} \varphi[\tau - \lambda(\xi)]\, d\xi = q(\tau). \tag{7.2}$$

В (7.2) неизвестной величиной при заданном $q(\tau)$ является $\lambda = \lambda(\xi)$, поэтому (7.2) есть интегральное уравнение. Поскольку было принято, что процесс капиллярной пропитки заканчивается за время $t_*$, при вытеснении нефти водой из трещиновато-пористого пласта спустя некоторое время в нем возникает и перемещается зона, в которой происходит капиллярная пропитка. Обозначим переднюю безразмерную координату этой зоны $\xi_1$, а заднюю, где уже закончилась капиллярная пропитка — $\xi_2$. Тогда безразмерная длина зоны капиллярной пропитки $\Delta\xi_* = \xi_1 - \xi_2$.

Для определения размера этой зоны необходимо найти соответствующее решение интегрального уравнения (7.2) при законе капиллярной пропитки (7.1).

Подставляя (7.1) в (7.2) и считая $q = \text{const}$, получаем

$$\frac{A}{2} m_2 s_* \frac{\sigma \cos\Theta \left(\frac{k_2}{m_2}\right)^{1/2} S_y^2}{\mu_н} \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{d\xi}{[\tau - \lambda(\xi)]^{1/2}} = q. \tag{7.3}$$

Легко убедиться непосредственной подстановкой, что решением (7.3) будет

$$\lambda = a\xi, \quad a = \frac{A m_2 s_* \sigma \cos\Theta \left(\frac{k_2}{m_2}\right)^{1/2} S_y^2}{q\mu_н}. \tag{7.4}$$

При этом значению $\xi = \xi_1$ будет соответствовать время $\tau$, так что $\tau = a\xi_1$, а значению $\xi = \xi_2$ соответствует время $\tau - \tau_*$, так что $\tau - \tau_* = a\xi_2$. Отсюда $\Delta\xi_* = \xi_1 - \xi_2 = \frac{\tau_*}{a}$ или

$$\Delta x_* = \frac{q t_* l_*}{A s_* m_2} = \frac{Q t_*}{S s_* m_2}, \tag{7.5}$$

где $Q$ — расход воды в размерных единицах; $S$ — площадь поперечного сечения пласта.

Рассмотрим пример.

Согласно экспериментальным данным, при пропитке блоков породы проницаемостью $k_2 = 2$ мД и пористостью $m_2 = 0{,}07$ водой с $\sigma = 34{,}4 \cdot 10^{-3}$ Н/м $= 35 \cdot 10^{-6}$ кгс/см и $\cos\Theta = 0{,}6$ при вязкости нефти $\mu_н = 2{,}7$ сПз, размере блока $l_* = 100$ см получилось, что $s_* = 0{,}5$, $A = 0{,}199$, $\tau_* = 25{,}3$.

Пусть идет вытеснение нефти водой из трещиновато-пористого пласта с указанными выше параметрами при $Q/S = 0{,}1$ м/сут. По формуле (7.1) имеем $t_* = 6{,}25$ сут. Тогда по формуле (7.5) получаем $\Delta x_* = 18$ м. При скорости вытеснения 1 м/сут размер зоны капиллярной пропитки будет равен 180 м.

Этот пример позволяет представить, в каких случаях заводнение трещиновато-пористого пласта будет более эффективным и в каких менее эффективным.

Среди инженеров-нефтяников еще существует мнение, что при наличии в пористом пласте трещин его нельзя подвергать заводнению. Приведенные выше теоретические соображения и расчеты показывают, что это далеко не всегда так. Многие пласты, сложенные песчаниками и известняками, в настоящее время подвергают заводнению, и во многих случаях оно проходит успешно — резкого обводнения скважин не происходит. Это указывает на то, что размер зоны капиллярной пропитки в таких пластах мал по сравнению с расстояниями между скважинами и с размером залежи в целом, и поэтому при узкой зоне капиллярной пропитки заводнение трещиновато-пористого пласта будет мало отличаться от «поршневого» вытеснения. Если же размер зоны капиллярного впитывания велик и превышает принятые на месторождении расстояния между скважинами или размер залежи, то вскоре в процессе заводнения будет наблюдаться сильное обводнение скважин. В таких случаях можно говорить, что заводнение пласта оказалось неэффективным.

Конечно, в реальных пластах вытеснение нефти водой из блоков происходит не только за счет противоточной капиллярной пропитки, но и под действием градиентов давления в трещинах.

Для описания вытеснения нефти водой из трещиновато-пористого пласта необходимо также знать распределение насыщенности в самих трещинах. Оно дается следующим уравнением, аналогичным уравнению Бакли — Леверетта (см. § 5 этой главы), с тем только отличием, что в нем учитывается нефть, притекающая из блоков в трещины:

$$q(\tau) F'(s) \frac{\partial s}{\partial \xi} + \frac{m_1 \sigma \cos\Theta \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} S_y^2}{\mu_н} \frac{\partial s}{\partial \tau} + \varphi[\tau - \lambda(\xi)] = 0. \quad (7.6)$$

Система уравнений (7.1), (7.2) и (7.6) полностью описывает рассматриваемый процесс. Заметим, кстати, что входящий в формулу (7.1) экспериментальный коэффициент $A$ сам зависит от времени $t_*$. Так, если ввести функцию $\Psi(t_*)$, определяемую как

$$\Psi(t_*) = \int_0^{t_*} \varphi(t)\, dt = \frac{A}{2} m_2 s_* \frac{\sigma \cos\Theta \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} S_y^2}{\mu_н} \times$$

$$\times \int_0^{t_*} \left( \frac{\sigma \cos\Theta \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} S_y^2 t}{\mu_н} \right)^{-1/2} dt = A m_2 s_* \left( \frac{\sigma \cos\Theta \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} S_y^2 t_*}{\mu_н} \right)^{1/2}, \quad (7.7)$$

то получим, считая, что $\frac{\Psi(t_*)}{m_2 s_*} = \text{const}$,

$$A \sim t_*^{-1/2}. \tag{7.8}$$

Лабораторные исследования и данные о фактической разработке пластов показывают, что скорость капиллярной пропитки пород, являющаяся сама по себе невысокой, может еще существенно снижаться из-за наличия прослоев очень малой проницаемости на контакте между пропластками или из-за ухудшения проницаемости на поверхности пористых блоков в трещиновато-пористых пластах. В этом случае, естественно, размер зоны капиллярной пропитки $\Delta x_*$ может существенно превышать размеры залежи, так что вскоре после начала заводнения вся площадь залежи будет обводнена, что в конечном счете приведет к добыче вместе с нефтью больших количеств воды.

Для ускорения капиллярной пропитки блоков и литологических неоднородностей может быть применен упруго-капиллярный циклический способ добычи нефти [104, 22, 127]. Практическое осуществление этого способа заключается в периодическом изменении давления или расхода жидкости на границах пласта, приводящем к периодическому изменению этих параметров на контакте высокопроницаемых и низкопроницаемых объектов пласта (прослоев, линз, блоков и т. д.).

Во время цикла повышения давления нефть, находящаяся в пористых блоках, линзах или прослоях, сжимается и в них входит вода. При цикле же понижения давления содержимое пласта (нефть и вода) расширяется, но вода удерживается капиллярными силами в тех неоднородностях, в которые она проникла, а нефть выходит из них.

В механизме упруго-капиллярного циклического способа добычи нефти есть два эффекта, от которых зависит результативность этого способа. Один из эффектов заключается в ускорении внедрения воды в не охваченные водой неоднородности пласта за счет увеличения в среднем перепада давления между ними. Второй эффект состоит в капиллярном удержании воды в неоднородностях.

Для оценки эффекта ускорения внедрения воды в неоднородности рассмотрим трещиновато-пористый пласт, используя уравнение обмена жидкостью между блоками и трещинами. Дифференцируя уравнение (6.14), получаем

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{v}{\beta_2} + \frac{dp}{dt}\right) = 0. \tag{7.9}$$

Положим $p = P \sin \omega t$, $\omega = 2\pi/\Theta_0$ ($\Theta_0$ — период цикла изменения давления). Тогда из (7.9) имеем

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{v}{\beta_2} + P\omega \cos \omega t\right) = 0. \tag{7.10}$$

Решение уравнения (7.10) выражается следующим образом:

$$v = \exp\left(-\frac{\alpha}{\mu\beta_2}t\right)\left[\int \frac{\alpha P\omega}{\mu}\cos\omega t \exp\left(\frac{\alpha t}{\mu\beta_2}\right)dt + C\right]. \quad (7.11)$$

При стационарном режиме колебаний получим

$$v = \frac{\alpha P\omega}{\mu\left(\frac{\alpha^2}{\mu^2\beta_2^2}+\omega^2\right)}\left(\frac{\alpha}{\mu\beta_2}\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right). \quad (7.12)$$

Рассмотрим случай, когда

$$\omega \ll \frac{\alpha}{\mu\beta_2}. \quad (7.13)$$

Тогда

$$v = P\omega\beta_2\cos\omega t. \quad (7.14)$$

При $\alpha = 10^{-12}$, что по порядку величин соответствует $k_2 = 10^{-10}$ см$^2$, $S_y^2 = 36\cdot10^{-4}$ 1/см$^2$, а также при $\mu = 10$ сПз, $\beta_2 = 10^{-4}$ 1/(кгс/см$^2$) величина $\alpha/\mu\beta_2 = 0{,}1$ 1/с и условие (7.13) выполняется при $\Theta_0 \gg 63$ с. По-видимому, вполне достаточен период $\Theta_0 = 600$ с $= 10$ мин, чтобы обмен жидкостью можно было определять по формуле (7.14). Средний за цикл переток жидкости в одном направлении (например, из трещин в блоки) $\vec{v}$ определяется по формуле

$$\bar{v} = \frac{2}{\Theta_0}\int_0^{\Theta_0/4} P\omega\beta_2\cos\omega t\,dt = \frac{2P\beta_2}{\Theta_0}. \quad (7.15)$$

При $\Theta_0 = 600$ с, $P = 9{,}81\cdot10^5$ Па (10 кгс/см$^2$), $\beta_2 = 10^{-9}$ 1/Па $= 10^{-4}$ 1/(кгс/см$^2$) величина $\vec{v} = 0{,}33\cdot10^{-5}$ 1/с. Поскольку $\vec{v}$ — это объем жидкости, вытекающей, например, из блоков в трещины за единицу времени на единицу объема трещиновато-пористого пласта, то общий объем жидкости в единице объема трещиновато-пористой среды будет равен $m = m_1 + m_2$. Тогда при условии, что в блок будет втекать вода, а вытекать нефть, в случае приведенного выше примера, считая $m = 0{,}2$, можно было бы в блоке полностью «заменить» нефть водой за $0{,}2/0{,}33\cdot10^{-5} \approx 0{,}6\cdot10^5$ с, т. е. менее чем за сутки, для чего потребовалось бы 100 циклов. Конечно, это было бы в случае полного удержания воды, поступающей в блоки. Поэтому приведенный выше пример скорости «замены» нефти в блоке на воду, т. е. извлечения нефти из блока, следует рассматривать лишь как возможность достижения такой скорости при осуществлении циклического воздействия на пласт.

Сравним теперь скорость «замены» нефти в блоке водой при циклическом воздействии на пласт со скоростью противоточной капиллярной пропитки при тех же параметрах ($k = 10^{-10}$ см$^2$, $m_2 = 0{,}2$, $S_y^2 = 36\cdot10^{-4}$ 1/см$^2$, $\sigma = 35\cdot10^{-6}$ кгс/см $= 34{,}4\cdot10^{-3}$ Н/м. Cos $\Theta = 0{,}6$, $\mu = 10$ сПз $\approx 10^{-7}$ кгс·с/см$^2$).

Из (7.1) получаем следующее выражение для средней за весь период скорости капиллярной пропитки:

$$\bar{\varphi}(t_*) = \frac{1}{t_*}\int_0^{t_*} \varphi(t)\,dt = \frac{Am_2 s_*}{t_*}\left[\frac{\sigma\cos\Theta\left(\frac{k_2}{m_2}\right)^{1/2} S_y^2 t_*}{\mu_н}\right]^{1/2}. \quad (7.16)$$

Или, учитывая, что

$$A\left[\frac{\sigma\cos\Theta\left(\frac{k_2}{m_2}\right)^{1/2} S_y^2 t_*}{\mu_н}\right]^{1/2} = 1, \quad (7.17)$$

имеем

$$\bar{\varphi}(t_*) = \frac{m_2 s_* \sigma\cos\Theta\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}\,S_y^2}{\tau_*\mu_н}, \quad (7.18)$$

Согласно приведенным выше экспериментальным данным, $\tau_* = 25{,}3$. Тогда для тех же параметров имеем $\bar{\varphi}(t_*) = 6{,}7\cdot10^{-8}$ 1/с. Таким образом, весь процесс противоточной капиллярной пропитки происходит при указанных выше условиях в 50 раз более медленно, чем процесс обмена жидкостью между блоками и трещинами за счет циклического воздействия при условии полного удержания в блоках проникшей в них воды.

Однако, как это указывалось выше, недостаточно только «внедрить» воду в неоднородности — важно, чтобы в части цикла, когда давление снижается, вода могла удержаться в неоднородностях капиллярными силами и из пород выходила нефть.

Экспериментальными исследованиями удержания воды в неоднородностях при циклическом воздействии было показано [127], что время, необходимое для того, чтобы вода, внедренная в неоднородности, полностью там удержалась, примерно равно времени, затрачиваемому на противоточную или прямоточную капиллярную пропитку данной неоднородности при хорошей связи данной неоднородности с остальным пластом. Циклическое воздействие позволяет ускорить «подачу» воды в неоднородность и извлечение из нее нефти, если данная неоднородность отделена от остального пласта слоем плохой проницаемости.

## § 8. ФИЛЬТРАЦИЯ ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Одним из распространенных видов подземного движения жидкостей и газов является совместное движение в пористой или трещиноватой среде жидкости и растворяющегося в ней газа. Такое движение происходит при разработке нефтяных залежей на режиме истощения.

Нефть, как сложная смесь различных углеводородов, содержит в своем составе самые легкие углеводороды, объединяемые под общим названием «попутный» газ. Поскольку начальный состав пластовой нефти является фиксированным (на некоторое количество дега-

зированной нефти приходится определенное количество газа), то при определенных давлении и температуре в пласте газ будет полностью растворен в нефти, которая в этих условиях будет представлять собой одну фазу.

Если же в процессе разработки залежи давление в пласте при постоянной температуре уменьшается и станет ниже давления насыщения нефти газом, в пласте появляется кроме жидкой еще и газовая фаза.

В некоторых случаях можно приближенно полагать, что в процессе выделения газа из нефти состав газа, а также состав дегазированной нефти будут одинаковыми, не зависящими от давления.

Тогда можно считать,что условия, существующие при выделении газа из нефти (например, состав контактирующего с нефтью газа), практически не влияют на процесс разгазирования нефти. Однако это может быть лишь в определенных случаях, например при достаточно тяжелых нефтях. В целом же ряде других случаев, когда в пласте движутся вещества, существенно растворяющиеся друг в друге, что имеет место в залежах легких нефтей с большим количеством растворенного в них газа, нужно учитывать движение в пласте не только фаз, но и компонентов.

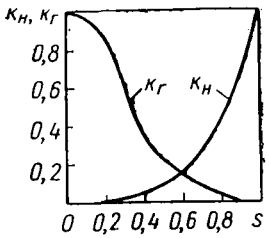



Рис. 61. Относительные проницаемости для нефти $k_н$ и газа $k_г$

При изучении подземного движения жидкости с растворяющимся в ней газом используются в своей основе те же уравнения неразрывности движущихся веществ, что и при изучении однофазного движения или движения взаимно не растворяющихся жидкостей, таких, как нефть и вода. Уравнения многофазной фильтрации были впервые получены Маскетом и Мересом [146]. В этих уравнениях учитывалось движение, например, нефти и газа, находящегося не только в газовой фазе, но и растворенного в нефти. В теории многофазной фильтрации учитывались также фазовые проницаемости жидкой и газовой фаз. На рис. 61 показаны относительные проницаемости для нефти и газа $k_н$ и $k_г$, откуда видно, что они имеют в общих чертах тот же вид, что и относительные проницаемости для взаимно не растворимых фаз. Фазовые проницаемости вообще, и в частности для системы нефть — газ, были впервые определены Виковом и Ботсетом [152]. Законы движения нефти и газа также аналогичны законам движения нефти и воды и имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_н &= -\frac{k_н^ф(s)}{\mu_н}\operatorname{grad} p; \\ \vec{v}_г &= -\frac{k_г^ф(s)}{\mu_г}\operatorname{grad} p, \end{aligned}\right\} \qquad (8.1)$$

где $k_н^ф(s)$, $k_г^ф(s)$ — фазовые проницаемости для нефти и газа, зависящие от насыщенности пористой среды нефтью $s$.

В законах (8.1) не учитываются капиллярные силы, как и в схеме Бакли — Леверетта.

Одним из простых видов подземного движения газированной нефти является ее установившееся движение. Такое движение может осуществляться, если на входе в пласт конечных размеров подавать в определенной пропорции нефть и газ, а на выходе из этого пласта извлекать нефть и газ в той же пропорции. В отдельных точках пласта и в пласте в целом насыщенность нефтью и газом, конечно, будет отличаться от пропорции, в которой подаются в пласт и извлекаются из него нефть и газ.

Теория установившейся фильтрации газированной жидкости была создана С. А. Христиановичем [116]. Начало изучению неустановившейся фильтрации газированной жидкости было положено работами Л. С. Лейбензона [65, 66], К. А. Царевича [117], М. М. Глоговского и М. Д. Розенберга [32], М. Д. Розенберга [97]. Теория как установившейся, так и неустановившейся фильтрации газированной жидкости получила дальнейшее развитие в работах [1, 2, 115 и др.] и используется в настоящее время при расчетах процессов извлечения нефти и газа из недр при режимах истощения.

Теория фильтрации газированной жидкости [146] не может быть использована при рассмотрении фильтрации трех и более компонентов с полным учетом их фазового состояния. Это позволяет сделать теория фильтрации многокомпонентных систем [47, 115]. Теория фильтрации газированной жидкости в трещиновато-пористой среде была развита в работе [17]. Теория фильтрации газоконденсатных смесей изложена в работе [96].

Рассмотрим в качестве примера установившуюся фильтрацию газированной жидкости, пользуясь представлениями теории фильтрации многокомпонентных систем [47].

Прежде чем написать для рассматриваемого случая уравнения неразрывности движущихся фаз — нефти и растворяющегося в ней газа, следует еще раз отметить, что газ в целом условно принимается за одно вещество (первый компонент), а полностью дегазированная нефть — за второе вещество (второй компонент). Кроме того, считается, что в любой момент времени в любой точке пласта газо-жидкостная система находится в термодинамическом равновесии.

Пусть $g_1$ — весовое содержание газового компонента в газовой фазе, $l_1$ — весовое содержание газового компонента в жидкой фазе, $g_2$ — весовое содержание жидкого компонента в газовой фазе, а $l_2$ — весовое содержание жидкого компонента в жидкой фазе.

Уравнения неразрывности компонентов в случае установившегося движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}(\vec{v}_г \rho_г g_1) + \operatorname{div}(\vec{v}_н \rho_н l_1) = 0; \\ &\operatorname{div}(\vec{v}_г \rho_г g_2) + \operatorname{div}(\vec{v}_н \rho_н l_2) = 0. \end{aligned} \tag{8.2}$$

В теории движения газированной жидкости в пористой среде обычно принимается, что газовая фаза не содержит жидкого компонента, т. е. что $g_2 = 0$. Приняв это предположение и учитывая, что $l_1 + l_2 = 1$, $g_1 + g_2 = 1$, из (8.2) получаем

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{v}_г\rho_г + \vec{v}_н\rho_н l_1) &= 0; \\ \operatorname{div}[\vec{v}_н\rho_н(1-l_1)] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

Вынесем за скобки в первом уравнении (8.3) величину $v_н\rho_н(1 - l_1)$. В результате будем иметь

$$\operatorname{div}\left[\vec{v}_н\rho_н(1-l_1)\left(\frac{\vec{v}_г\rho_г}{\vec{v}_н\rho_н}\frac{1}{1-l_1} + \frac{l_1}{1-l_1}\right)\right] = 0. \tag{8.4}$$

Введем обозначение

$$\Gamma = \left(\frac{\vec{v}_г\rho_г}{\vec{v}_н\rho_н} + l_1\right)\frac{1}{1-l_1}. \tag{8.5}$$

Используя известную формулу векторного анализа, получаем

$$\operatorname{div}[\vec{v}_н\rho_н(1-l_1)\Gamma] = \Gamma\operatorname{div}[\vec{v}_н\rho_н(1-l_1)] + [\vec{v}_н\rho_н(1-l_1)]\operatorname{grad}\Gamma. \tag{8.6}$$

Первый член в правой части формулы (8.6) равен нулю в соответствии со вторым уравнением (8.3). Следовательно, с учетом (8.4) и второй член в (8.6) равен нулю. Поскольку второй член в (8.6) представляет собой с точностью до множителя $\rho_н(1 - l_1)$ скалярное произведение скорости $\vec{v}_н$ на grad Г, которое равно произведению модулей, помноженному на косинус угла между перемножаемыми векторами, получаем, что в направлении скорости $\vec{v}_н$, т. е. вдоль линий тока, grad Г = 0 и таким образом

$$\Gamma = \text{const}. \tag{8.7}$$

Что же представляет собой величина Г? Нетрудно видеть, что Г является массой газа, проходящего через элемент пласта за некоторый отрезок времени, отнесенной к массе жидкого компонента (дегазированной нефти), проходящей через тот же элемент пласта за тот же отрезок времени.

Величину Г называют газовым фактором, приведенным к атмосферным условиям.

Положим теперь

$$H = \int \frac{k_н\rho_н g(1-l_1)}{\mu_н}\,dp + \text{const}. \tag{8.8}$$

Учитывая, что $\operatorname{grad} H = \frac{dH}{dp}\operatorname{grad} p$, из второго уравнения (8.3) получаем

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} H = \nabla^2 H = 0. \tag{8.9}$$

Функция $H$, удовлетворяющая уравнению Лапласа (8.9), называется функцией Христиановича.

Для вычисления функции Христиановича необходимо, чтобы все величины, входящие в подынтегральное выражение (8.8), были

выражены как функции давления $p$. Поскольку в любой точке пласта нефтегазовая смесь находится в термодинамическом равновесии, величины $\rho_н$, $l_1$ и $\mu_н$ зависят только от $p$. Однако фазовая проницаемость $k_н^ф$ зависит от насыщенности порового пространства нефтью $s$. Следовательно, нужно найти зависимость $s = s(p)$, используя условие установившегося течения $Г = \text{const}$. Задавая значение Г, по формуле (8.5) определяем $s = s(p)$. Для этого в свою очередь нужно знать зависимость $\rho_н$, $\rho_г$, $\mu_н$ и величины $l_1$ от $p$.

Рассмотрим вначале зависимость $\rho_н = \rho_н(p)$. Вес некоторого количества нефти в пластовых условиях, $P_н$ равен сумме весов дегазированной нефти и растворенного в ней газа, т. е. $P_н^0$ и $P_г^р$. Исходя

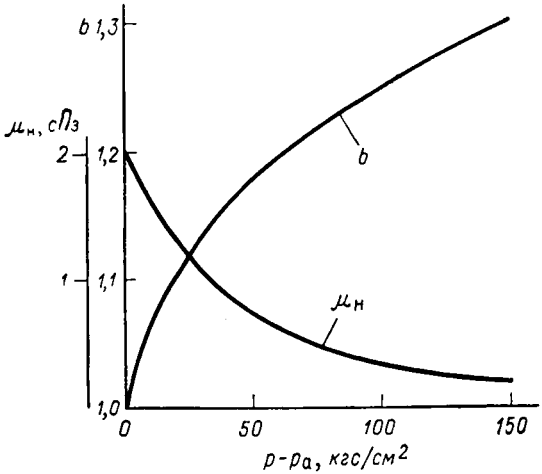



Рис. 62. Зависимость вязкости нефти $\mu_н$ и объемного коэффициента $b$ от избыточного давления $p - p_а$

из закона Генри и учитывая, что в каждой точке пласта существует термодинамическое равновесие, имеем

$$l_1 = \frac{P_г^р}{P_н} = \alpha p, \quad \alpha = \text{const}. \tag{8.10}$$

Введем еще понятие объемного коэффициента $b$, равного отношению объема $V_н$, который занимает некоторое количество нефти вместе с растворенным в ней газом при пластовом давлении, к объему того же количества нефти $V_н^0$ в атмосферных условиях, т. е. без растворенного в ней газа. Таким образом,

$$\frac{V_н}{V_н^0} = b. \tag{8.11}$$

Учитывая, что $P_н = P_н^0 + P_г^р$, из (8.10) и (8.11) получаем следующее соотношение:

$$\rho_н = \frac{\rho_н^0}{b(1 - l_1)}, \tag{8.12}$$

где $\rho_н^0$, $\rho_н$ — соответственно плотности дегазированной нефти и нефти в пластовых условиях при наличии в ней растворенного газа.

Экспериментальные данные показывают, что объемный коэффициент $b$ в свою очередь зависит от давления. Вязкость нефти, содержащей растворенный в ней газ, также зависит от давления. На рис. 62 представлены типичные зависимости $b$ и $\mu_н$ от давления $p - p_а$ для легкой нефти ($p_а$ — атмосферное давление).

При расчетах удобнее пользоваться не функцией $H$, записанной в форме (8.8), а функцией $H^*$, определяемой следующим образом:

$$H^* = \frac{\mu_н^0}{k\rho_н^0 g} H, \tag{8.13}$$

где $\mu_0^н$ — вязкость нефти при избыточном давлении, равном нулю; $k$ — абсолютная проницаемость.

Для построения функции $H^* = H^*(p - p_а)$ используем следующие данные: $\alpha = 10^{-3}$ 1/кгс/см²; $\rho_н^0 = 800$ кг/м³; $\mu_г = 0{,}01$ сПз = const; давление насыщения $p^* = 147 \cdot 10^5$ Па = 150 кгс/см². Плотность газа в атмосферных условиях 1 кгс/м³. Газовый фактор Г можно определить из условия достижения в некоторой точке пласта

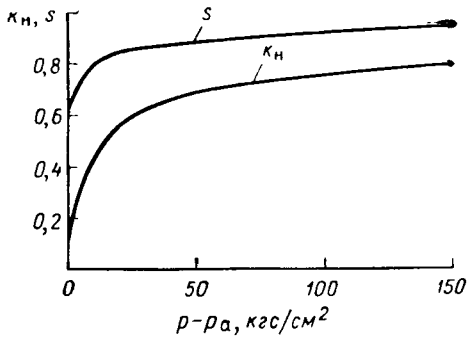



Рис. 63. Зависимость $k_н$ и $s$ от избыточного давления $p - p_а$

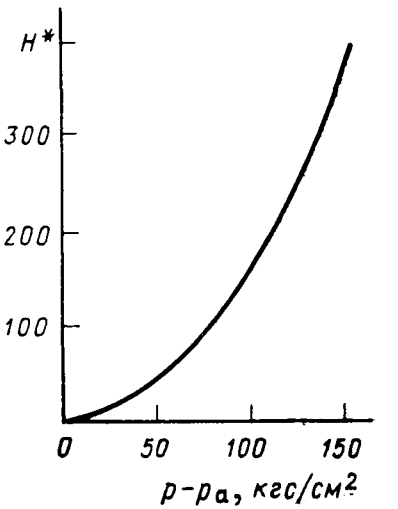



Рис. 64. Зависимость функции $H^*$ от $p - p_а$

давления насыщения $p^*$, при котором $l_1 = l_1^*$, $l_2 = l_2^*$. Следовательно,

$$\Gamma = \frac{l_1^*}{l_2^*} = \frac{\alpha p^*}{1 - \alpha p^*}. \tag{8.14}$$

Для приведенных выше условий Г = 0,177 кг/кг.

Используя законы фильтрации фаз (8.1) и считая газ идеальным, преобразуем формулу (8.5) к следующему виду:

$$\frac{k_н(s)}{k_г(s)} = \frac{\mu_н(p - p_а)}{\mu_г} \cdot \frac{\rho_г^0 b(p - p_а)}{p_а \rho_н^0 \left[\Gamma - \dfrac{\alpha(p - p_а)}{1 - \alpha(p - p_а)}\right]}. \tag{8.15}$$

Левая часть соотношения (8.15) зависит только от $s$, а правая — только от $p - p_a$. Следовательно, на основе (8.15) можно построить зависимости $s = s(p - p_a)$ и $k_н = k_н(p - p_a)$, которые и показаны на рис. 63.

Теперь можно найти зависимость $H^* = H^*(p - p_a)$. Она представлена на рис. 64.

Определим теперь дебит нефти $q_н$, поступающей в скважину из пласта, в котором происходит установившееся движение нефтегазовой смеси. Очевидно, имеем

$$q_н = q_н^0 b = v_н S = -\frac{k_н^ф(s)}{\mu_н} 2\pi r h \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{k k_н}{\mu_н^0 \mu_н^*} 2\pi r h \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \mu_н^* = \frac{\mu_н}{\mu_н^0}. \tag{8.16}$$

Поскольку

$$\frac{\partial H^*}{\partial r} = \frac{dH^*}{dp}\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{dH^*}{dp} = \frac{k_н^*}{\mu_н^* b},$$

из (8.16) получаем

$$q_н^0 = -\frac{k}{\mu_н^0} 2\pi r h \frac{\partial H^*}{\partial r}. \tag{8.17}$$

Отсюда

$$q_н^0 = \frac{2\pi k h}{\mu_н^0} \frac{H_к^* - H_с^*}{\ln \frac{r_к}{r_с}}. \tag{8.18}$$

В формуле (8.18) индексами «к» и «с» помечены значения соответствующих величин на контуре и в скважине. Интересно, что в рассмотренном выше примере, для которого построена зависимость $H^* = H^*(p - p_a)$, представленная на рис. 64, сравнительно небольшому перепаду давления соответствует небольшая разность функций $H^*$. Например, при $\Delta p = 4{,}9 \cdot 10^6$ Па (50 кгс/см$^2$) величина $\Delta H^* = 42$ единицы. Однако с увеличением перепада давления разность $\Delta H^*$ превышает $\Delta p$. Так, при $\Delta p = 9{,}81 \cdot 10^6$ Па (100 кгс/см$^2$) $\Delta H^* \approx 180$ единицам. Если сравнивать, пользуясь формулой (8.18), фильтрацию однофазной и газированной жидкости, то при $\Delta p = 4{,}9 \cdot 10^6$ Па и при вязкости однофазной жидкости, равной $\mu_н^0$, дебит однофазной жидкости будет больше дебита газированной жидкости. В данном случае наличие газа в пористой среде приводит к снижению дебита скважины. Однако если взять перепад давления при движении однофазной жидкости равным $9{,}81 \cdot 10^6$ Па (100 кгс/см$^2$), что может быть обеспечено при достаточно большом пластовом давлении, то при таком перепаде давления дебит нефти, движущейся в пласте при режиме растворенного газа, был бы больше дебита однофазной жидкости. Это происходит из-за того, что наличие большого количества газа, растворенного в нефти, приводит к значительному снижению вязкости нефти, что снижает фильтрационное сопротивление более существенно по сравнению с ростом сопротивления движению нефти из-за наличия в пласте газовой фазы.

## § 9. ВЛИЯНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА ПОДЗЕМНОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕФТИ И ГАЗА

На жидкости и газы, насыщающие нефтегазоносные пласты, всегда действует сила тяжести. В течение геологических периодов времени, прошедших с начала формирования залежей нефти и газа, происходило гравитационное (под действием силы тяжести) разделение веществ, насыщающих пласты. В результате этого в соответствующих условиях образовались залежи нефти с «газовыми шапками», произошло разделение нефти и воды или даже разделение газовых и нефтяных залежей путем миграции газа в вышележащие пласты. При разработке месторождений, содержащих нефть, газ и воду, нарушается естественное состояние, в котором находилось то или иное месторождение, и сила тяжести начинает вновь перемещать жидкости и газы в разрабатываемых объектах.

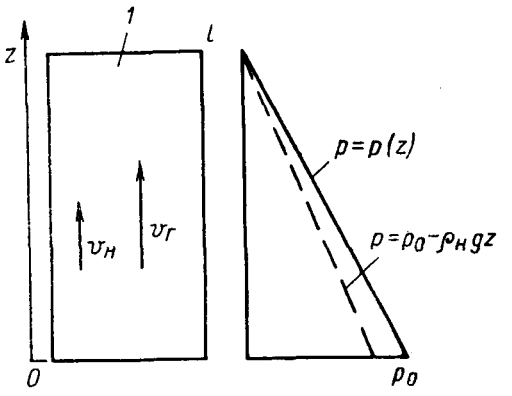



Рис. 65. Движение нефти и газа в вертикально расположенном пласте

*1* — пласт

Разделение веществ, насыщающих нефтяные пласты, под действием силы тяжести, т. е. явление сегрегации, в ряде случаев оказывает существенное влияние на разработку пластов.

При математическом описании процессов фильтрации с сегрегацией используют обобщенный закон фильтрации, связывающий скорость фильтрации $i$-той фазы $\vec{v}_i$ с перепадом давлений в фазе grad $p_i$, плотностью фазы $\rho_i$, фазовыми проницаемостями $k_i^{ф}$ и вязкостью $\mu_i$. Имеем следующую формулировку обобщенного закона фильтрации:

$$\vec{v}_i = -\frac{k_i^{ф}}{\mu_i}(\operatorname{grad} p_i + \rho_i g \sin\alpha). \tag{9.1}$$

Входящая в выражение (9.1) величина $\alpha$ является углом наклона потока к горизонтальной поверхности.

Если, например, в вертикальном пласте (рис. 65) движутся нефть и газ, т. е. две фазы, то на основе (9.1) получаем следующие зависимости:

$$\begin{aligned}\vec{v}_н &= -\frac{k_н^{ф}}{\mu_н}\left(\frac{\partial p_н}{\partial z} + \rho_н g\right);\\ \vec{v}_г &= -\frac{k_г^{ф}}{\mu_г}\left(\frac{\partial p_г}{\partial z} + \rho_г g\right).\end{aligned} \tag{9.2}$$

Индексы «н» и «г» в выражении (9.2) относятся соответственно к нефти и к газу.

В случае, когда в пласте (см. рис. 65) движется, например, одна нефть, происходит линейное распределение давления $p = p(z)$. При отсутствии движения $p = p_0 - \rho_н z$.

При наличии в поровом пространстве пласта воды вместо газа вторая зависимость (9.2) заменяется зависимостью

$$\vec{v}_в = -\frac{k_в^ф}{\mu_в}\left(\frac{\partial p_в}{\partial z} + \rho_в g\right). \tag{9.3}$$

Как известно, связь между фазовыми давлениями получают, вводя понятие капиллярного давления (схема Раппопорта — Лиса), или считают его одинаковым в обеих фазах (схема Бакли — Леверетта).

Пусть вертикально расположенный пласт в начальный момент времени $t = 0$ был насыщен нефтью. Газ содержится в нефти только в растворенном состоянии. При $t > 0$ произошло быстрое снижение давления в пласте, из нефти выделился газ и под действием силы тяжести газ начал всплывать и уходить через газо-нефтяной контакт (граница $z = l$) в газовую шапку, т. е. возник процесс сегрегации газа.

Будем приближенно считать, что нефть практически не движется, т. е. $\vec{v}_н \approx 0$. Тогда из закона (9.2) получается, что начальное распределение давления в нефти является гидростатическим. Примем также, что давление в газовой фазе равно давлению в нефтяной фазе, т. е. $p_н = p_г = p$. Поскольку в течение всего времени сегрегации газа распределение давления $p$ принимается гидростатическим, получаем

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_н g. \tag{9.4}$$

Отсюда согласно (9.2)

$$\vec{v}_г = \frac{k_г^ф(s)}{\mu_г}(\rho_н - \rho_г) g. \tag{9.5}$$

Подставим (9.5) в уравнение неразрывности газовой фазы

$$\frac{\partial \vec{v}_г}{\partial z} = m\frac{\partial s}{\partial t}, \tag{9.6}$$

где $s$ — газонасыщенность.

В результате получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{k_г^ф(s)}{\mu_г}(\rho_н - \rho_г) g\right] = m\frac{\partial s}{\partial t}. \tag{9.7}$$

Произведем оценочный расчет времени сегрегации газа, для чего положим $k_г^ф(s) = ks$ ($k$ — абсолютная проницаемость пород пласта). Тогда для скорости перемещения некоторого значения

газонасыщенности в пласте, например нижней границы движущегося газа, т. е. для «скорости сегрегации» $v_{сг}$, получим на основании уравнения (9.7) следующее выражение:

$$v_{сг} = \frac{k(\rho_н - \rho_г)g}{\mu_г m}. \tag{9.8}$$

Если высота пласта равна $l$, то время $t_{сг}$, за которое нижняя граница газа переместится к газо-нефтяному контакту, составит

$$t_{сг} = \frac{l}{v_{сг}} = \frac{l\mu_г m}{k(\rho_н - \rho_г)g}. \tag{9.9}$$

Возьмем, например, $k = 100$ мД $= 10^{-9}$ см$^2$, $m = 0{,}2$ ($\rho_н - \rho_г)g = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$ кгс/см$^3$, $\mu_г = 0{,}02$ сПз $\approx 2 \cdot 10^{-10}$ кгс·с/см$^2$, $l = 20$ м $= 2 \cdot 10^3$ см. Тогда $v_{сг} = 2 \cdot 10^{-2}$ см/с, а $t_{сг} = 10^5$ с. Таким образом, полная сегрегация газа в этих идеализированных условиях произойдет довольно быстро по сравнению с обычно существующими

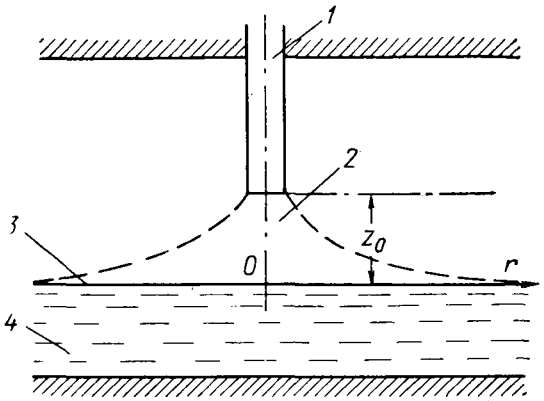



Рис. 66. Конус воды:

*1* — скважина; *2* — конус воды; *3* — начальное положение водо-нефтяного контакта; *4* — вода

сроками разработки пластов. Конечно, помимо принятых выше допущений, следует учитывать, что реальные пласты имеют слоистость, и проницаемость их в вертикальном направлении может быть меньше чем в горизонтальном. Если принять $k = 1$ мД, то время сегрегации по сравнению со сделанной выше оценкой увеличится в 100 раз и составит уже $10^7$ с, т. е. более 100 сут.

Действие силы тяжести проявляется в пластах особенно существенно в случае притока нефти к скважинам, вскрывшим нефтяной пласт с подошвенной водой, или при эксплуатации скважин, вскрывших нефтяную часть пласта при наличии в нем газовой шапки. В этих условиях могут образоваться водяные, газовые или двойные (газоводяные) конусы. На рис. 66 показана скважина, эксплуатирующая нефтяной пласт, подстилаемый водой. Забой скважины нахо-

дится на расстоянии $z_0$ от зеркала водо-нефтяного контакта. При эксплуатации скважины, т. е. при наличии притока жидкости к ней, давление на различных расстояниях от оси скважины будет различным. Это вызовет деформацию водо-нефтяного контакта и подтягивание конуса воды к забою скважины. При остановке скважины конус воды осаждается. Исследованию образования водяных и газовых конусов в пластах посвящены работы Маскета [73, 74], М. Д. Миллионщикова [76], П. Я. Полубариновой-Кочиной [93], И. А. Чарного [119], Д. А. Эфроса [130], А. К. Курбанова [61], П. Б. Садчикова [100], А. П. Телкова и Ю. И. Стклянина [106], Н. С. Пискунова [92] и др.

В сильно истощенных нефтяных пластах, когда уровень нефти вблизи скважин или в пластах в целом не достигает даже кровли, движение нефти происходит практически только под действием силы тяжести. В данном случае возникает так называемая безнапорная фильтрация. Для приближенного математического описания распределения напора (уровня) нефти в пласте используется дифференциальное уравнение, аналогичное дифференциальному уравнению изотермической фильтрации газа. Однако, как показано И. А. Чарным [118], формулы для дебитов галереи и скважины, полученные на основе этой приближенной теории, совпадают с точными формулами.

## § 10. КОНВЕКТИВНАЯ ДИФФУЗИЯ. СОРБЦИЯ

Истинная скорость жидкости или газа в каждой отдельной точке внутри порового пространства отличается как по величине, так и по направлению от средней скорости движения. Поэтому скорость некоторых частиц фильтрующихся веществ оказывается меньше средней скорости движения, скорость же других частиц превышает ее. Если в фильтрующейся жидкости растворено иное вещество, то частицы этого вещества будут перемещаться в пористой среде со скоростями, отличными от средней скорости фильтрующейся жидкости. Экспериментальные и теоретические исследования движения веществ, растворенных в фильтрующейся жидкости, а также фильтрации взаимно растворяющихся жидкостей, выполненные фон Розенбергом [150], Кохом и Слободом [141], Шейдеггером [122], Аронофски и Геллером [131], В. Н. Николаевским [83], П. И. Забродиным

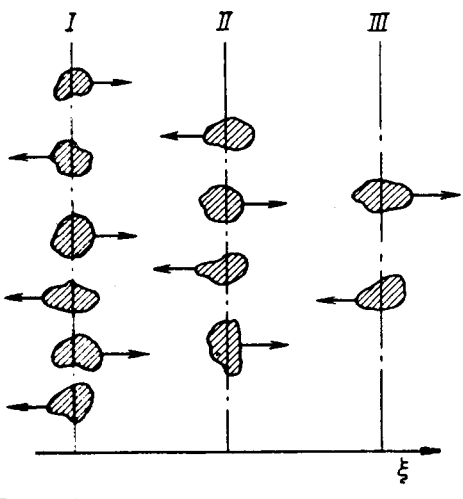



Рис. 67. Движение меченых частиц жидкости, наблюдаемое в подвижной системе координат

Н. Л. Раковским и М. Д. Розенбергом [53], В. К. Горбанец и А. И. Хазнеферовым [33] и др., показали, что процесс распространения в пористой среде растворенных в фильтрующейся жидкости веществ происходит подобно диффузии. В результате упомянутых выше работ сложилось следующее представление о механизме этого процесса. Пусть в прямолинейном образце пористой среды фильтруется однородная жидкость с неравномерно растворенным в ней каким-либо веществом. Выделим мысленно в этом образце три сечения *I*, *II* и *III* (рис. 67), перемещающихся слева направо со скоростью $\vec{v}_c$, равной средней скорости движения жидкости в пористой среде, т. е. скорости фильтрации, деленной на пористость $m$.

На рис. 67 заштрихованными фигурками со стрелками обозначены отдельные частицы или струйки фильтрующейся жидкости, содержащие «меченые» частицы, т. е. частицы растворенного в жидкости вещества. Из-за различия скоростей отдельных частиц или струек одни из них движутся с более высокой скоростью, чем $\vec{v}_c$, а другие движутся со скоростью, меньшей $\vec{v}_c$. Тогда при наблюдении в движущейся системе координат

$$\xi = x - v_c t, \quad \tau = t, \qquad (10.1)$$

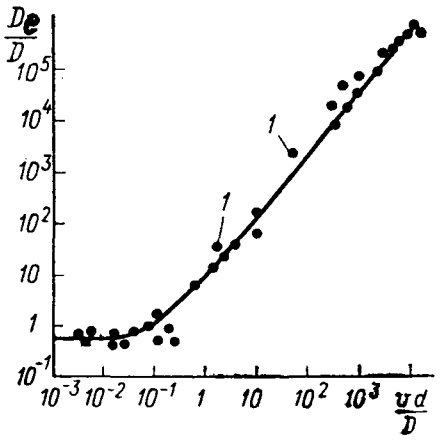



Рис. 68. Зависимость $Dl/D$ от $vd/D$:
*1* — экспериментальные точки

будет представляться, что некоторые частицы или струйки жидкости «уходят» из сечения *II* влево, а другие — вправо. Фактически все частицы жидкости движутся слева направо, но так как их движение наблюдается из подвижной системы координат, относительно нее частицы могут перемещаться влево или вправо. Имеются также частицы, движущиеся со скоростью, равной $\vec{v}_c$.

Картина, похожая на описанную выше, существует и в сечениях *I* и *III* (см. рис. 67). Примем, что общий уровень концентрации растворенного вещества или меченых частиц в сечении *I* больше, а в сечении *III* меньше, чем в сечении *II*. Тогда можно считать, что возникает «результирующий поток» частиц или струек от сечения *I* к сечению *II* и от сечения *II* к сечению *III*. Описанный выше процесс распространения растворенного в фильтрующейся жидкости вещества получил название конвективной диффузии. На этот процесс оказывает влияние также молекулярная диффузия. В целом рассматриваемый процесс описывается, как показывают экспери-

менты, уравнением

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} D_e \frac{\partial C}{\partial \xi}, \tag{10.2}$$

где $C$ — концентрация вещества.

В уравнении (10.2) коэффициент $D_e$ учитывает и молекулярную и конвективную диффузию.

Согласно экспериментальным данным [56], при малых скоростях фильтрации коэффициент $D_e$ с точностью до коэффициента, характеризующего структуру пористой среды, равен коэффициенту молекулярной диффузии $D$, а при больших скоростях $D_e$ пропорционален скорости фильтрации. Зависимость $D_e/D$ от $vd/D$ ($d$ — линейный параметр, например диаметр зерен пористой среды), определенная экспериментально [56], показана на рис. 68. Вообще конвективная диффузия происходит не только в направлении вектора скорости фильтрации, но и в поперечных направлениях, так что эффективный коэффициент диффузии $D_e$ представляется [83] в виде тензора. Как видно из рис. 68, $D_e$ может намного (на несколько порядков) превышать величину $D$, составляющую примерно $10^{-5}$ см$^2$/с.

Переходя к координатам $x$ и $t$, из (10.2) получаем с учетом (10.1)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{\partial C}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial C}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = -v_c \frac{\partial C}{\partial \xi} + \frac{\partial C}{\partial \tau}. \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

В формуле (10.3) $\partial\tau/\partial x = 0$, поскольку $x$ и $t$ — независимые переменные, а $\tau = t$.

Из уравнения (10.2) при этом получается дифференциальное уравнение конвективной диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \vec{v}_c \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} D_e \frac{\partial C}{\partial x}. \tag{10.4}$$

В общем случае уравнение конвективной диффузии имеет следующий вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \vec{v}_c \cdot \operatorname{grad} C + \operatorname{div} D_e \operatorname{grad} C. \tag{10.5}$$

В уравнении (10.5) $v_c \cdot \operatorname{grad} C$ — скалярное произведение вектора скорости движения фильтрующейся жидкости на градиент концентрации растворенного вещества.

Решение уравнения (10.4) можно получить путем решения уравнения (10.2) при соответствующим образом видоизменных граничных условиях с последующим переходом от системы координат $\xi$, $\tau$ к координатам $x$, $t$.

Если в случае молекулярной диффузии перемещение частиц растворенного вещества происходит под действием движения молекул то можно считать, что конвективная диффузия обусловлена гидродинамическими силами. Еще большее значение гидродинамические силы приобретают при перемешивании в пористой среде в процессе

фильтрации взаимно растворяющихся жидкостей различной исходной вязкости. При математическом описании перемешивания взаимно растворимых фильтрующихся жидкостей различной вязкости можно в принципе использовать теорию фильтрации многофазных многокомпонентных веществ с учетом обмена между фазами из-за диффузии. Если учитывать не только межфазную диффузию в каждой точке среды, но и диффузию в направлении фильтрации, то, идя этим путем, можно было бы получать решения задач в наиболее общих случаях. Вместе с тем достаточно точные результаты дает и диффузионная теория [48] перемешивания взаимно растворимых жидкостей различной исходной вязкости. Уравнения диффузии (10.2) и (10.5) можно интерпретировать как уравнения неразрывности диффузионного потока. Относительная скорость этого потока $\vec{v}_D$, равная разности истинной скорости диффузионного потока и средней скорости движения фильтрующегося вещества $\vec{v}_c$, определяется на основе (10.2) и (10.5) следующим образом:

$$\vec{v}_D = -D_e \operatorname{grad} C. \tag{10.6}$$

В (10.6) имеется в виду выражение для градиента концентрации в подвижной системе координат типа (10.1).

Выше уже было сказано, что в общем случае эффективный коэффициент диффузии $D_e$ представляет собой тензор, характеризующий различие истинных скоростей в пористой среде.

Таким образом, согласно (10.6) относительная скорость диффузионного потока $\vec{v}_D$ выражается произведением двух величин — эффективного коэффициента диффузии, т. е. тензора диспersии истинных скоростей $D_e$, и градиента концентрации вещества $\operatorname{grad} C$. В работе [48] было высказано предположение, что $D_e$ как фактор гидродинамической природы при перемешивании взаимно растворимых жидкостей различной исходной вязкости зависит от градиента вязкости смеси этих жидкостей $\operatorname{grad} \mu_c$. Действительно, чем больше различие вязкостей смешивающихся жидкостей в рассматриваемой точке пористой среды, тем должна быть больше дисперсия истинных скоростей фильтрации. Предположение [48] о зависимости $D_e$ от градиента вязкости смеси при перемешивании в пористой среде жидкостей различной исходной вязкости вполне удовлетворительно подтверждается экспериментальными данными [53]. Вообще правильнее было бы принять, что $D_e$ в рассматриваемом случае зависит от скалярного произведения вектора скорости фильтрации на градиент вязкости смеси. Тогда для эффективного коэффициента диффузии $D_e$ при фильтрации взаимно смешивающихся жидкостей различной исходной вязкости будем иметь на основе работы [48] следующую зависимость:

$$D_e = D_e^0\left(1 + \frac{k_D}{v}\vec{v} \cdot \operatorname{grad} \mu_c\right). \tag{10.7}$$

где $D_e^0$ — эффективный коэффициент диффузии при перемешивании фильтрующихся жидкостей одинаковой исходной вязкости; $k_D$ — коэффициент [48].

При совпадении направлений вектора скорости фильтрации и градиента вязкости получаем

$$D_e = D_e^0(1 + k_D|\operatorname{grad}\mu_c|). \tag{10.8}$$

После подстановки (10.7) в (10.5) получается уравнение конвективной диффузии при перемешивании в пористой среде взаимно растворяющихся жидкостей различной вязкости.

Рассмотрим теперь пример перемешивания фильтрующихся жидкостей различной исходной вязкости. Одним из весьма характерных

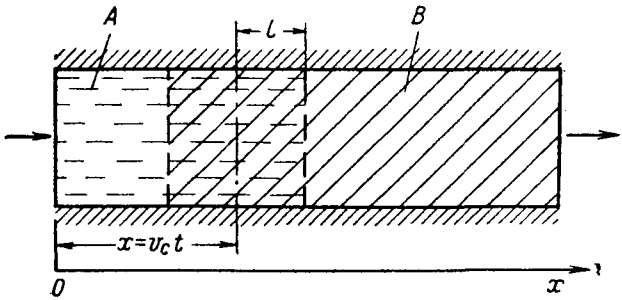



Рис. 69. Движение смешивающихся жидкостей в прямолинейном пласте

случаев перемешивания фильтрующихся жидкостей является перемешивание путем вытеснения из пористой среды одной жидкости другой, растворяющейся в первой. Допустим, что прямолинейный бесконечный пласт в начальный момент времени был заполнен жидкостью, которая затем вытесняется из пласта другой жидкостью, растворяющейся в первой. В результате в некоторый момент времени в пласте получим картину, схематично показанную на рис. 69, где вытесняющая жидкость $A$ имеет исходную вязкость $\mu_1$, а вытесняемая жидкость $B$ — исходную вязкость $\mu_2$. Между жидкостями $A$ и $B$ возникает зона смеси длиной $2l$. Требуется определить концентрации $C$ жидкости $A$ в жидкости $B$ в любой момент времени. При рассмотрении этого примера используем некоторое упрощение уравнения (10.2), а именно пренебрежем членом, содержащим $\left(\frac{\partial C}{\partial \xi}\right)^2$, в результате чего с использованием (10.8) получим для определения концентрации $C$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_e^0\left(1 + k_D\frac{\partial \mu_c}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v_c\frac{\partial C}{\partial x}. \tag{10.9}$$

Используем также известную в литературе зависимость вязкости смеси $\mu_c$ от концентрации и вязкостей исходных жидкостей:

$$\mu_c = \mu_1(\mu_2/\mu_1)^{1-C}. \tag{10.10}$$

Решение этой задачи приближенным методом, полученное в работе [48], приводит к следующему выражению, служащему для определения $l$:

$$\frac{1}{2}(1+z)^2-2(1+z)+\ln(1+z)+\frac{3}{2}=\frac{a^3t}{b^2};$$
$$z=\frac{al}{b};\quad a=2{,}14D_e^0;\quad b=0{,}804D_e^0k_D\mu_1J. \tag{10.11}$$

Входящая в формулу (10.11) величина $J$ зависит от $\mu_2/\mu_1$ (рис. 70)

Из выражения (10.11) можно получить две асимптотические формулы:

при $z \ll 1$

$$2l=2{,}68\,(D_e^0k_D\mu_1Jt)^{1/3}; \tag{10.12}$$

при $z \gg 1$

$$2l=4{,}14\,(D_e^0t)^{1/2}. \tag{10.13}$$

Распределение концентрации в пласте дает формула

$$C=0{,}25\left[2-\frac{x-v_ct}{l}-\left(\frac{x-v_ct}{l}\right)^3\right]. \tag{10.14}$$

Формула (10.14) получена исходя из предположения, что при $\xi = x - v_ct = 0$ $C = 0{,}5$.

На рис. 71 показана зависимость длины зоны смеси $2l$ от комплекса $k_DD_e^0\mu_1Jt$. На этом же рисунке показаны экспериментальные точки. Согласно экспериментальным данным, $D_e^0 \approx$ $\approx 10^{-2}$ см$^2$/с, величина же $k_D \approx 10^{12}$ см$^5$/кгс·с$^2$.

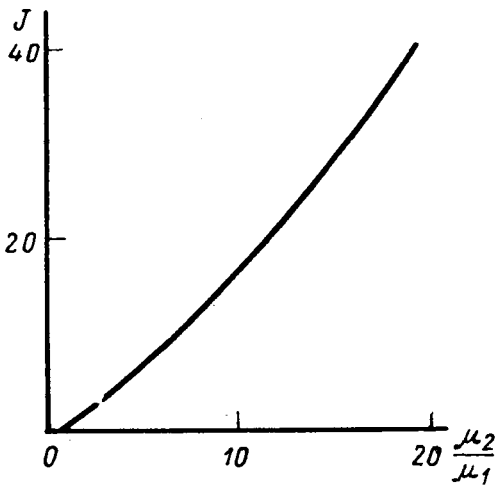


Рис. 70. Зависимость $J = J(\mu_2/\mu_1)$

Перейдем теперь к рассмотрению явления сорбции в пористой среде. Целый ряд веществ, содержащихся в пластовой воде или нефти, может вследствие изменения термодинамических условий осаждаться на поверхности зерен пористой среды. Это может в определенных условиях происходить со смолами и асфальтенами, которые входят в состав нефтей, с солями, которые содержатся в пластовой воде, или с различного рода добавками к закачиваемой в породы воде.

С целью повышения нефтеотдачи пластов при заводнении к воде добавляются [68, 114] поверхностно-активные вещества (ПАВ), которые, изменяя условия связи углеводородов нефти с породой,

увеличивают извлечение нефти из недр. Однако поверхностно-активные вещества при этом частично остаются на зернах породы, «теряются», иногда временно, до тех пор, пока вода без ПАВ, закачиваемая вслед за водой, содержащей ПАВ, не смоет их с поверхности зерен породы и не перенесет в глубь пласта по направлению, в котором происходит вытеснение нефти из пород [114].

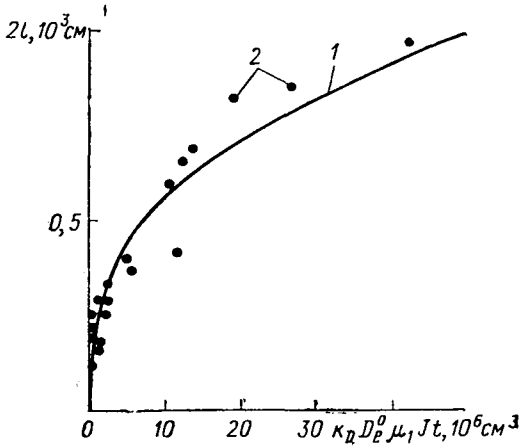



Рис. 71. Зависимость длины зоны смешения $2l$ от параметра $k_D D_e^0 \mu_1 Jt$:

*1* — теоретическая кривая; *2* — экспериментальные точки

Естественно, что количество сорбирующегося ПАВ влияет на эффективность его применения. Поэтому необходимо уметь оценивать количественно адсорбцию ПАВ на зернах породы.

Явление сорбции в общем случае рассматривают с учетом кинетики [109]. При этом считают, что изменение количества адсорбированного в единице объема среды вещества $A$ за время $t$ пропорционально разности концентрации $C$ вещества, находящегося в растворе в данной точке пористой среды в данный момент времени, и так называемой равновесной концентрации $C_*$, устанавливающейся при бесконечно долгом выдерживании раствора в пористой среде без движения.

Таким образом,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \beta (C - C_*). \qquad (10.15)$$

В уравнении (10.15) коэффициент $\beta$ называется кинетическим коэффициентом.

Из термодинамических соображений следует, что количество адсорбированного в единице объема породы вещества должно в свою очередь зависеть от равновесной концентрации, т. е.

$$A = f(C_*). \qquad (10.16)$$

Зависимости типа (10.16) называют изотермами сорбции. В тех случаях, когда количество адсорбированного на зернах вещества стремится к пределу при возрастании $C_*$, можно пользоваться изотермой Лэнгмюра

$$A = \frac{C_*}{g_0 + \lambda C_*}. \qquad (10.17)$$

В выражении (10.17) $g_0$ и $\lambda$ — постоянные коэффициенты. При малых $C_*$ из (10.17) получается изотерма Генри

$$A = \frac{C_*}{g_0}. \tag{10.18}$$

Для полного описания сорбции используется уравнение массопереноса с учетом диффузии и сорбции

$$\operatorname{div} D_e \operatorname{grad} C = v_c \operatorname{grad} C + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{10.19}$$

Система уравнений (10.15), (10.16) и (10.19) математически описывает процесс сорбции в пористой среде с учетом кинетики сорбции.

Если же имеются достаточные основания считать, что в каждой точке среды очень быстро достигается равновесное состояние, то текущую концентрацию сорбируемого вещества в растворе следует полагать равной равновесной концентрации, т. е. $C = C_*$.

Уравнение (10.15) при этом теряет смысл, а вместо (10.16) будем иметь

$$A = A(C). \tag{10.20}$$

Используя зависимость, аналогичную изотерме Генри, и пренебрегая диффузией, можно из уравнения (10.19), справедливого и при равновесной сорбции, получить для одномерного случая следующее простое уравнение:

$$v_c \frac{\partial C}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{g_0}\right) \frac{\partial C}{\partial t} = 0. \tag{10.21}$$

Из (10.21) вытекает, что в пористой среде может возникнуть «фронт» сорбции [62], т. е. граница распространения сорбированного вещества, дальше которой по направлению движения сорбированное вещество отсутствует. Скорость распространения этой границы $w_c$ всегда меньше скорости движения $v_c$:

$$\frac{w_c}{v_c} = \frac{1}{1 + \frac{1}{g_0}}. \tag{10.22}$$

Например, пусть $g_0 = 0{,}25$. Тогда $w_c/v_c = 0{,}2$. Это значит, что скорость движения границы адсорбированного вещества в пять раз меньше средней скорости движения закачиваемой в пористую среду жидкости. Количество вещества, адсорбированного на зернах породы в единице объема среды, выражается как $A = C/g_0$. Если исходная концентрация в движущейся жидкости адсорбируемого вещества $C = 0{,}025$ г/л, то на 1000 см$^3$ пористой среды адсорбируется 0,1 г вещества.

## § 11. ФИЛЬТРАЦИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Развитие методов воздействия на нефтяные залежи в целью повышения продуктивности скважин и увеличения нефтеотдачи привело к значительному расширению ассортимента веществ, закачиваемых

в нефтяные пласты. Многие из жидких веществ, применяемых для закачки в скважины, не обладают свойствами ньютоновских жидкостей.

В настоящее время известны факты из практики разработки нефтяных месторождений, которые могут быть объяснены проявлением неньютоновских свойств жидкостей при их фильтрации. Проявление этих свойств приводит к возникновению нелинейного закона фильтрации, в частности закона фильтрации с начальным градиентом давления [78]. На рис. 72 показана зависимость *1* между скоростью фильтрации и градиентом давления (закон фильтрации), для которой характерным является то, что фильтрация начинается не при нулевом значении величины grad $p$, а при grad $p$, равном некоторой величине $G$, называемой начальным градиентом давления.

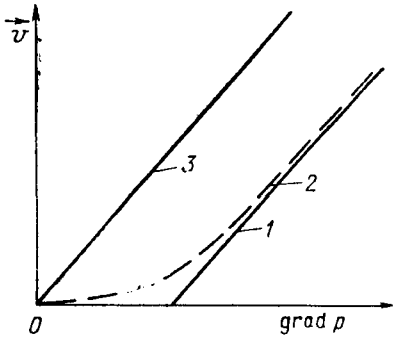



Рис. 72. Закон Дарси и закон фильтрации с начальным градиентом сдвига

Закон фильтрации в соответствии с зависимостью *1* (см. рис. 72) формулируется следующим образом:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}(\operatorname{grad} p - G), \quad |\operatorname{grad} p| \geqslant G;$$

$$\vec{v} = 0, \quad |\operatorname{grad} p| < G. \qquad (11.1)$$

Закон фильтрации в форме (11.1) для нефтяных пластов был обоснован работами А. Х. Мирзаджанзаде и соавторов [36, 78] и подтвержден экспериментально Б. И. Султановым [103]. Исследованию фильтрации однородных и неоднородных неньютоновских жидкостей посвящены работы М. Г. Алишаева, Г. Г. Вахитова, И. Ф. Глумова, И. Е. Фоменко [88], В. М. Ентова [42], М. Г. Бернадинера [19] и др.

Приведенным выше законом можно приближенно описывать также зависимость *2* (см. рис. 72). Хотя эта зависимость и исходит из начала координат, но при значениях $|\operatorname{grad} p| < G$ величина $\vec{v}$ очень мала. Величина $G$ в случае фильтрации неньютоновских жидкостей зависит от предельного напряжения сдвига жидкости и среднего диаметра пор.

Для сравнения с (11.1) на рис. 72 показан закон Дарси (зависимость *3*).

Необходимо отметить, что наблюдение в лабораторных экспериментах или в промысловой практике закона фильтрации типа (11.1) не всегда может быть связано с неньютоновскими свойствами жидкостей. Причиной возникновения закона фильтрации (11.1) могут быть физико-химическое взаимодействие фильтрующихся жидкостей с материалом пористой среды, например гидратация глин.

В пористой среде, по-видимому, могут быть условия, когда нелью-

тоновская жидкость, проявляющая начальный градиент сдвига в лабораторных испытаниях, может двигаться в пласте по закону, близкому к закону *2* (см. рис. 72) или даже к закону Дарси, из-за присутствия в пористой среде связанной воды, обволакивающей зерна породы и являющейся своеобразной «смазкой» для основной фильтрующейся жидкости.

Движение нефти в пластах по закону (11.1) приводит к существенным особенностям разработки этих пластов, не встречающимся в случае фильтрации по закону Дарси. Возьмем, например, прямолинейный пласт (рис. 73), на границе которого $x = 0$ в момент времени $t = 0$ устанавливается давление $p_c$, а при $x = L$ $p = p_к$.

Если рассматривать неустановившуюся фильтрацию при упругом режиме по закону Дарси, то спустя некоторое время, как известно, в прямолинейном пласте, показанном на рис. 73, должно практически установиться стационарное распределение давления (линия *1* на рис. 73). При фильтрации же по закону (11.1) волна понижения давления при определенных значениях перепада давления не распространится на всю длину пласта $L$, а лишь на некоторую его часть $l < L$, где будет давление $p = p_к$. Как нетрудно видеть, длина $l$ определяется формулой

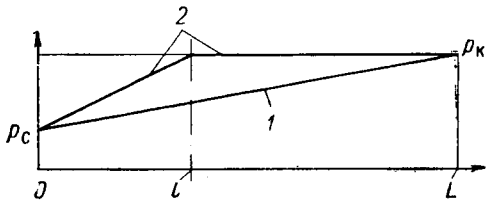



**Рис. 73. Распределение давления в прямолинейном пласте:**

*1* — при фильтрации по закону Дарси; *2* — при фильтрации с начальным градиентом сдвига

$$l = \frac{p_к - p_c}{G}. \tag{11.2}$$

Только если $\Delta p_c = p_к - p_c \geqslant LG$, волна понижения давления «пробивает» весь пласт, т. е. во всем пласте будет происходить фильтрация. Однако дебит жидкости, как это следует непосредственно из (11.1), будет меньше, чем при фильтрации по закону Дарси.

Если при фильтрации по закону Дарси при установившемся распределении давления пласт будет эксплуатироваться с дебитом

$$q = \frac{kS(p_к - p_c)}{\mu L}, \tag{11.3}$$

то при установившемся распределении давления в соответствии с законом (11.1) будет

$$q = \frac{kS(p_к - p_c - GL)}{\mu L}. \tag{11.4}$$

При $l < L$ дебит равен нулю, так как при $x > l$ фильтрация отсутствует и к поверхности $x = l$ не сможет поступать жидкость из области пласта $x > l$.

При радиальной фильтрации к скважине радиусом $r_с$ из пласта радиусом $r_к$ при наличии предельного градиента давления получаем для дебита жидкости $q$ вместо формулы Дюпюи следующую формулу — ее аналог:

$$q = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{\Delta p_с - r_к G}{\ln \frac{r_к}{r_с}}, \quad \Delta p_с = p_к - p_с,$$

$$q = 0 \text{ при } \Delta p_с \leqslant r_к G. \tag{11.5}$$

Из (11.5) следует, что зависимость $q = q(\Delta p_с)$, т. е. индикаторная кривая скважины, при фильтрации с начальным градиентом давления не проходит через начало координат, а отсекает на оси $\Delta p_с$ отрезок, равный $r_к G$. Как непосредственно видно из формулы (11.5), наличие предельного градиента давления в пласте ведет к уменьшению дебита скважины при тех же условиях по сравнению с фильтрацией по закону Дарси.

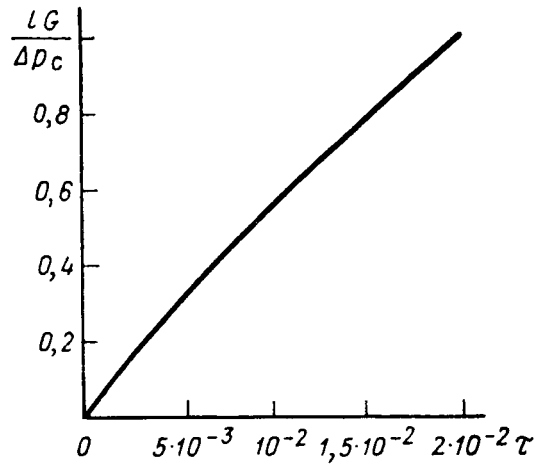


Рис. 74. Зависимость $lG/\Delta p_с$ от $\tau$

При неустановившейся фильтрации с начальным градиентом давления граница области, где скорость фильтрации отлична от нуля, будет перемещаться со скоростью, зависящей от пьезопроводности пласта $\varkappa$, предельного градиента сдвига $G$, перепада давления $\Delta p_с$ и времени $t$. Для случая прямолинейного неустановившегося движения, т. е., например, для пласта, показанного на рис. 73, имеем зависимость величины $lG/\Delta p_с$ от безразмерного времени $\tau = \varkappa G^2 t/\Delta p_с^2$, изображенную на рис. 74. Из нее следует, что при $lG/\Delta p_с = 1$ безразмерное время $\tau = 0{,}2$. Зная $\varkappa$, $G$ и $\Delta p_с$, можно определить физическое время, необходимое для достижения предельного расстояния $l$, на которое может распространиться волна давления при фильтрации с предельным градиентом давления.

Важным эффектом фильтрации с предельным градиентом давления является возможность образования в пласте застойных зон, где движение жидкости или газа отсутствует. Возникновение застойных зон ведет к уменьшению нефтеотдачи пластов. Образование застойных зон рассмотрим на примере вытеснения нефти водой из пласта с пятиточечной системой расположения скважин (рис. 75). Пусть через нагнетательную скважину *1* (рис. 75) закачивается вода,

а через эксплуатационные скважины *2* отбирается нефть. Как следует из характеристики двумерного течения, в зонах *3* скорость течения будет мала по сравнению со скоростями течения в областях, прилегающих к прямым, соединяющим нагнетательную и эксплуатационные скважины. Поэтому эти зоны и окажутся застойными [19]. Отношение незаштрихованных областей на рис. 75 ко всей площади пятиточечной ячейки можно считать коэффициентом охвата пласта воздействием по площади. На рис. 76 показано, как будет зависеть коэффициент охвата $\beta$ от параметра $\lambda = q\mu/kGL$ ($q$ — дебит эксплуатационной скважины). Из рис. 76 видно, что $\beta$ увеличивается с увеличением $\lambda$. В самом деле, чем больше $G$, при одних и тех же остальных величинах, входящих в $\lambda$, тем меньше коэффициент охвата. Вместе с тем с увеличением $q$ и $\mu$ охват увеличивается. Объяснение увеличения охвата с ростом $\mu$ состоит в том, что при больших $\mu$ возникают и большие перепады давления, что способствует большему вовлечению в разработку зон с малыми градиентами давления.

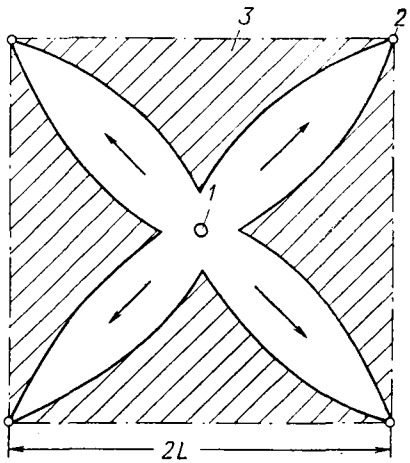



Рис. 75. Вытеснение нефти водой при существовании начального градиента сдвига:

*1* — нагнетательная скважина; *2* — эксплуатационные скважины; *3* — застойные зоны

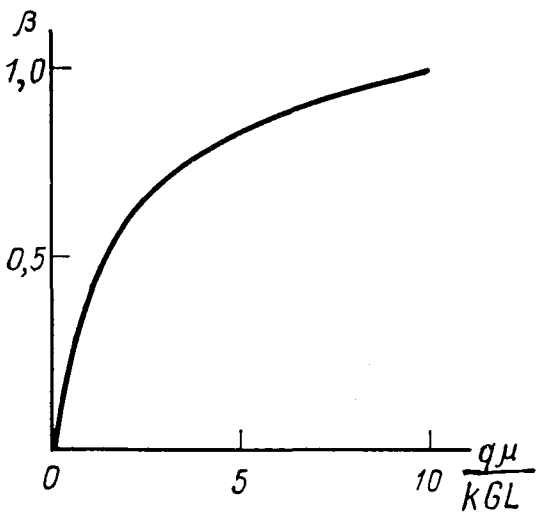



Рис. 76. Зависимость коэффициента охвата $\beta$ от параметра $q\mu/kGL$

Неполный охват пласта воздействием из-за наличия предельного градиента давления может выражаться не только в виде неполного охвата по площади, но и по мощности если пласт имеет прослои различной проницаемости. Вместе с тем следует отметить, что для установления изменения коэффициента охвата из-за предельного градиента давления применительно к реальному конкретному пласту необходимы еще очень тщательные всесторонние исследования с тем, что-

бы выделить эффект предельного градиента давления в чистом виде, поскольку изменение охвата пластов может быть следствием целого ряда других причин, связанных с деформацией горных пород, неоднородностью пласта, физико-химическими явлениями и т. д. Например, изменение абсолютной величины и профиля приемистости нагнетательных скважин при изменении давления нагнетания может быть связано с деформацией пород пласта и образованием в них трещин, а изменение профиля отдачи в эксплуатационных скважинах — с капиллярными эффектами в призабойной зоне, а не с проявлением предельного градиента давления во всем пласте.

## ГЛАВА IV

# ДЕФОРМАЦИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

### § 1. ЕСТЕСТВЕННОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД И ЕГО ИЗМЕНЕНИЕ ВБЛИЗИ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК

Горные породы, залегающие в земной коре, подвергались в течение геологического времени и подвергаются в настоящее время действию силы тяжести, внутриземных сил, притяжения Солнца, Луны и планет, физико-химическим превращениям. Под действием этих факторов в горных породах создалось напряженное состояние, которое будем называть естественным напряженным состоянием.

При искусственном воздействии на горные породы путем выработок в них проявляется эффект естественного напряженного состояния пород или горного давления.

Рассматривая естественное напряженное состояние пород, следует различать вертикальную компоненту горного давления $\sigma_z$ и горизонтальную $\sigma_{x,y}$. Вертикальную компоненту горного давления называют также полным горным давлением и обозначают $q_г$, а горизонтальную компоненту — боковым горным давлением и обозначают $q_\infty$ [45].

Естественное напряженное состояние горных пород можно определять косвенными методами, например по данным о распространении волн напряжений в породах, используя зависимость плотности пород и их модуля упругости от сжимающего напряжения [55].

К прямым методам определения горного давления можно, с некоторым допущением, отнести измерение горного давления в горных выработках (скважинах, стволах шахт, штреках и т. д.) с последующим расчетом напряженного состояния пород вдали от выработок по соответствующим формулам теории упругости, пластичности и т. д. Можно получать сведения о естественном напряженном состоянии пород, используя данные гидравлического разрыва пласта [50].

Имеющиеся в настоящее время данные, полученные различными методами, свидетельствуют о том, что для определения вертикальной компоненты горного давления в не насыщенных жидкостью или газом горных породах можно использовать формулу

$$\sigma_z = \rho_п g H. \qquad (1.1)$$

В формуле (1.1) $\rho_п$ — осредненная плотность горных пород в интервале от $z = 0$ до $z = H$ ($z$ — вертикальная координата, причем $z = 0$ на дневной поверхности); $g$ — как и выше, ускорение свободного падения.

Считается, что горизонтальную компоненту естественного напряженного состояния пород для не насыщенных жидкостью или газом пород можно определить по формуле

$$q_\infty = \alpha\sigma_z. \tag{1.2}$$

Коэффициент $\alpha$ определяется существующими в настоящее время методами весьма приближенно. Считается, что наиболее вероятные значения $\alpha$ для хрупких горных пород заключены в пределах 0,3 ÷ ÷ 0,7. Для малопрочных, текучих горных пород $\alpha \approx 1$. Объясняется это тем, что релаксация напряжений в твердых, хрупких горных породах либо не происходит вовсе, либо происходит чрезвычайно медленно, так что даже за геологические периоды, длившиеся десятками и сотнями миллионов лет, разность между вертикальным и боковым горным давлением сохраняется. Если горные породы упругие и в пластах отсутствовали значительные тектонические движения, особенно в горизонтальном направлении, то $\alpha = \nu/(1 - \nu)$ ($\nu$ — коэффициент Пуассона). У малопрочных пород время релаксации достаточно мало по сравнению с периодами существования геологических структур, и вследствие текучести пород, хотя и медленной, разность между боковым и вертикальным горным давлением могла практически исчезнуть. В вязкой жидкости, например, согласно закону Паскаля давление, действующее на элементарный объем жидкости в вертикальном направлении, равно давлению жидкости, действующему на этот объем в горизонтальном направлении.

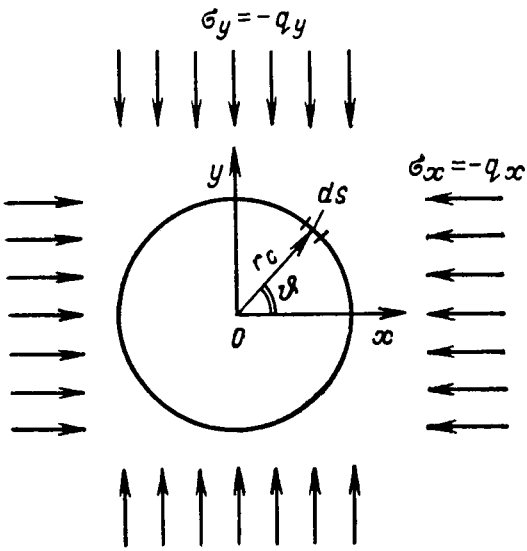



Рис. 77. Действие усилий в горных породах вокруг вертикальной выработки круговой формы в плане

Выше речь шла о напряженном состоянии пород, которые еще не подверглись искусственному воздействию. При проведении горных выработок напряженное состояние, по крайней мере вблизи выработок, существенным образом изменяется.

Важной задачей в горном деле является обеспечение устойчивости горных сооружений, поэтому необходимо знать деформацию пород при строительстве и эксплуатации горных выработок, а также возникающие при этом напряжения, с тем чтобы можно было правильно проектировать горные сооружения.

Стволы шахт и нефтяные скважины являются основными горными сооружениями, имеющими первостепенное значение для добычи полезных ископаемых.

Напряженное состояние горных пород вблизи скважин и шахт при осесимметричном действии нагрузок определяется на основе методов и формул, изложенных в главе I. Рассмотрим теперь упругую деформацию горных пород вблизи выработок круговой формы в плане, когда действие нагрузки на выработку не является осесимметричным. Рассмотрим пример плоского двумерного напряженного состояния.

Пусть скважина радиусом $r_c$ пробурена в массиве, где действует лишь одностороннее сжимающее напряжение $\sigma_x = -q_x$, направленное вдоль оси $0x$ (рис. 77). Заметим, что сооружение скважины, т. е. выемка горной породы из массива, сжатого напряжением $\sigma_x = -q_x$, равносильно тому, как если бы к каждой элементарной площадке контура скважины $ds = r_c d\vartheta$ приложили усилия $\sigma_{nx} = -q_x \cos\vartheta$, $\sigma_{ny} = 0$ (см. рис. 77). Поэтому, определив напряженное состояние, которое возникло бы при приложении к контуру скважины указанных усилий, и наложив это напряженное состояние на первоначальное напряженное состояние в горных породах, получим искомое напряженное состояние.

Решение этой задачи получается методом Н. И. Мусхелишвили [80]. Для определения напряжений имеем в данном случае следующие формулы:

$$\sigma_x - i\tau_{xy} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} - \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]' - \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)};$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}}\right];$$

$$\varphi(\zeta) = -\frac{q_x r_c}{2\zeta}; \quad \psi(\zeta) = \frac{q_x r_c}{2\zeta} - \frac{q_x r_c}{2\zeta^3};$$

$$\omega(\zeta) = r_c\zeta; \quad \varphi'(\zeta) = \frac{q_x r_c}{2\zeta^2}; \qquad (1.3)$$

$$\omega'(\zeta) = r_c; \quad \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{q_x}{2\zeta^2};$$

$$\frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} = \frac{q_x}{2\zeta^2}; \quad \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]' = -\frac{q_x}{\zeta^3};$$

$$\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = -\frac{q_x}{2\zeta^2} + \frac{3q_x}{2\zeta^4}.$$

Из (1.3) получаем выражение для напряжения $\sigma_x$ на контуре скважины:

$$\sigma_x = -q_x\left(1 - \frac{3}{2}\cos 2\vartheta + \frac{1}{2}\cos 4\vartheta\right). \tag{1.4}$$

Из формулы (1.4) вытекает, что при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ напряжение $\sigma = 0$, а при $\vartheta = \pi/2$ и $\vartheta = 3\pi/2$ величина $\sigma_x = -3q_x$.

Комбинируя приведенные выше решения, можно получить также решение задачи о напряженном состоянии вокруг скважины, пробуренной в массиве, где действуют два или несколько односторонне направленных сжимающих усилий. Так, например, если скважина находится в поле усилий $\sigma_y = -q_y$, действующих по оси $y$, и усилий $\sigma_x = -q_x$ (см. рис. 77), то, используя принцип суперпозиции напряженных состояний, получаем следующее выражение для напряжения $\sigma_x$ на контуре скважины:

$$\sigma_x = -q_x\left(1 - \frac{3}{2}\cos 2\vartheta + \frac{1}{2}\cos 4\vartheta\right) + \\ + \frac{q_x}{2}\left[\cos 2\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos 4\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)\right]. \tag{1.5}$$

В этом случае при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ имеем $\sigma_x = 0$, а при $\vartheta = \pi/2$ и $\vartheta = 3\pi/2$ будет $\sigma_x = -2q_x$. Описанное выше напряженное состояние существует в породах, деформирующихся упруго в соответствии с законом Гука.

Рассмотрим теперь пример пластической деформации горных пород вблизи скважины, считая напряженное состояние одномерным, зависящим от радиуса $r$. В этом случае имеем следующее уравнение для напряжений $\sigma_r$ и $\sigma_\theta$:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \tag{1.6}$$

Вертикальная компонента напряжения

$$\sigma_z = -\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta). \tag{1.7}$$

В формуле (1.7) $\sigma$ — среднее нормальное напряжение.

Будем считать, что состояние пластичности наступает, когда максимальное касательное напряжение достигает постоянной предельной величины $K_п$, т. е.

$$\tau^* = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) = K_п. \tag{1.8}$$

Пусть радиус скважины составляет $r_с$, а среднее нормальное напряжение при $r = r_с$ равно $\sigma_0$. Тогда, решая уравнение (1.7)

при условии (1.8) получаем следующие выражения для напряжений:

$$\left.\begin{aligned} \sigma = -\sigma_z = \sigma_0 + 2K_{\text{п}} \ln \frac{r}{r_{\text{с}}}; \\ -\sigma_r = \sigma_0 - K_{\text{п}} + 2K_{\text{п}} \ln \frac{r}{r_{\text{с}}}; \\ -\sigma_\Theta = \sigma_0 + K_{\text{п}} + 2K_{\text{п}} \ln \frac{r}{r_{\text{с}}}. \end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

Из (1.9) следует, что вблизи скважины образуется пластическая область, где вертикальное напряжение $\sigma_z$ оказывается ниже вертикального горного давления $q_{\text{г}}$. Эта область, названная С. А. Христиановичем областью разгрузки горного давления, распространяется от скважины не бесконечно далеко, а до определенного радиуса $r = r_*$, называемого радиусом разгрузки горного давления.

Если во время сооружения скважины давление жидкости в ней было равно гидростатическому, то согласно второй формуле (1.9)

$$\rho_{\text{в}} g H = \sigma_0 - K_{\text{п}}, \quad (1.10)$$

где $\rho_{\text{в}}$ — плотность воды; $H$ — глубина залегания пластически деформирующегося пласта.

Радиус области пластической деформации определяется формулой

$$r_* = 0{,}61 r_{\text{с}} \exp\left[\frac{(\rho_{\text{п}} - \rho_{\text{в}}) g H}{2K_{\text{п}}}\right]. \quad (1.11)$$

Из (1.11) видно, что размер области разгрузки горного давления сильно зависит от параметра $[(\rho_{\text{п}} - \rho_{\text{в}})\, gH]/2K_{\text{п}}$.

Так, при $(\rho_{\text{п}} - \rho_{\text{в}})\, g = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ кгс/см$^3$, $K_{\text{п}} = 29{,}5 \cdot 10^5$ Па (30 кгс/см$^2$), $H = 2000$ м, $r_{\text{с}} = 1$ м радиус области разгрузки горного давления равен 90 м, а при глубине 1000 м и тех же параметрах он равен лишь 7,4 м.

Разгрузка горного давления оказывает большое влияние не только на процесс проходки скважины, так как из-за пластической деформации из разбуриваемых горизонтов «выдавливается» большое количество малопрочных пород, но и на последующую разработку пластов, расположенных около пластически деформирующегося пласта. Таким образом, разгрузка горного давления изменяет напряженное состояние вблизи скважины и облегчает образование трещин в пластах при повышении давления жидкости в скважине.

## § 2. ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О МЕХАНИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГОРНЫХ ПОРОД И НАСЫЩАЮЩИХ ИХ ЖИДКОСТЕЙ

Поровое пространство гранулярных горных пород, а также имеющиеся в породах трещины, каверны и другие полости в естественных условиях, как правило, бывают заполнены жидкостями или газами.

Эти подвижные вещества, насыщающие горные породы, находятся под давлением. В горных породах в свою очередь имеются напряжения. Любое изменение давления жидкости или газа, а также нагрузок на горные породы нарушает имеющееся в данный момент времени соотношение между давлением и напряжениями. Другими словами, между породами и насыщающими их веществами существует механическое взаимодействие.

Начнем рассмотрение механического взаимодействия горных пород и насыщающих их веществ в следующем наиболее простом случае. Возьмем образец пористой среды (рис. 78), покрытый сверху гибкой непроницаемой оболочкой, и поместим его под пресс, создающий вертикальное давление $S_z$ на образец. Допустим, что гидравлическим или иным способом в образце создается также горизонтальное давление $S_x = S_y$. Внутрь образца подводится по трубке жидкость, имеющая давление $p$. В материале образца соответственно возникают напряжения $\sigma_x$, $\sigma_y$ и $\sigma_z$. Если, например, изменить давление жидкости $p$, оставив неизменными внешние нагрузки на образец $S_x$, $S_y$ и $S_z$, то это должно вызвать изменение напряжений $\sigma_x$, $\sigma_y$ и $\sigma_z$ в материале образца. Возникает вопрос: каковы эти изменения в количественном отношении?

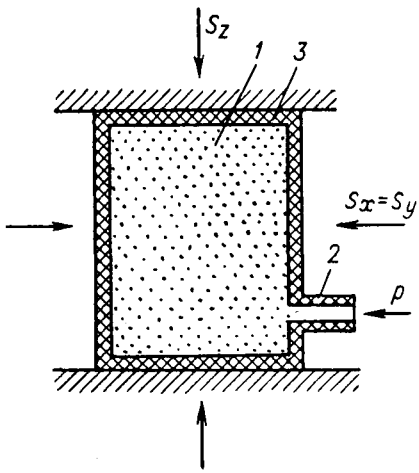



Рис. 78. Действие усилий на образец пористой горной породы:

*1* — образец; *2* — трубка; *3* — гибкая непроницаемая оболочка

Прежде чем ответить на этот вопрос, разберемся в самих понятиях о напряжениях в пористом теле. Механика взаимодействия жидкостей и твердого вещества в пористом теле требует введения различных понятий о напряжениях. Если детально рассматривать деформацию самого материала пористой среды, т. е. каждого ее «зерна», то нужно пользоваться понятием истинных напряжений. Истинные напряжения — это обычные напряжения, с которыми имеют дело при изучении деформации монолитного материала.

Если же рассматривать деформацию пористого тела в целом, т. е. принимать это тело за некоторую условно монолитную среду, то следует ввести в рассмотрение понятие об эффективном напряжении, или усилии, действующем на единичную площадку пористого тела в целом, включая как зерна, так и пустоты. Напряжения $\sigma_x$, $\sigma_y$ и $\sigma_z$ в образце пористого тела, показанного на рис. 78, являются эффективными напряжениями. Используем еще понятие так называемого нейтрального напряжения, создаваемого в пористом теле только внутрипоровым давлением $p$ и приводящего к возникновению

в материале пористого тела следующих истинных напряжений:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p; \quad \tau_{x_y} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0. \tag{2.1}$$

Безусловно, и эффективные напряжения и нейтральное напряжение связаны определенным образом с истинными напряжениями. Понятия об эффективном и нейтральном напряжениях были введены К. Терцаги [108].

Было бы, возможно, более правильным пользоваться только истинными напряжениями, однако трудность их определения в пористом теле приводит в конце концов к необходимости применения понятия эффективных напряжений, так как экспериментально их определить значительно легче.

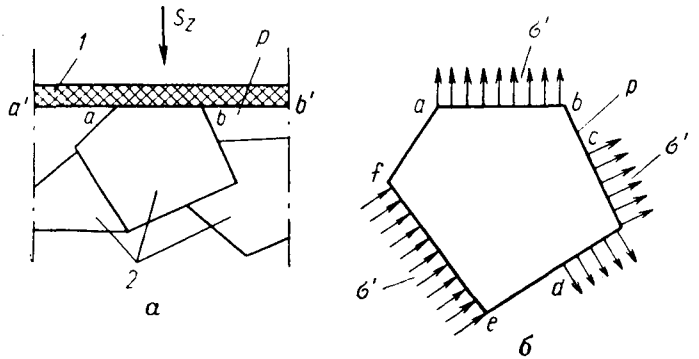



Рис. 79. Действие усилий на зерна породы:
*1* — непроницаемая оболочка; *2* — зерна породы

Вернемся теперь к поставленному выше вопросу о количественной взаимосвязи между внутрипоровым давлением $p$, эффективными напряжениями $\sigma_x$, $\sigma_y$ и $\sigma_z$ и величинами $S_x$, $S_y$ и $S_z$, которые назовем полными напряжениями.

В связи с этим вопросом рассмотрим равновесие сил на контакте образца с прессом (рис. 79, *а*). Пусть «зерно» породы на участке $ab$ соприкасается с непроницаемой оболочкой и далее — с прессом, а на участках $bc$, $de$ и $fa$ (рис. 79, *б*) смачивается жидкостью. На участках $ab$, $cd$ и $ef$ на зерно действуют осредненные напряжения $\sigma'$. Из равновесия усилий на участке $a'b'$ (рис. 79, *а*) длиной, равной единице, получаем, считая, что смачиваемая жидкостью часть участка $a'b'$ равна $m$,

$$S_z = mp + \sigma'(1 - m). \tag{2.2}$$

На первый взгляд может показаться, что согласно (2.2) давление жидкости не полностью «противостоит» внешним усилиям. Однако это не так. Выше под напряжениями понимались только эффективные напряжения, а напряжение $\sigma'$ включает в себя как эффективное, так и нейтральное напряжение. В самом деле, если рассмотреть действие на зерно породы различных усилий согласно рис. 79, *б*, то

можно увидеть, что сдвиговые напряжения и, следовательно, деформацию, вызывающую изменение конфигурации зерна, может создать только разность напряжений $\Delta = \sigma' - p$. Изменение же нейтрального напряжения не приводит к изменению эффективных напря-

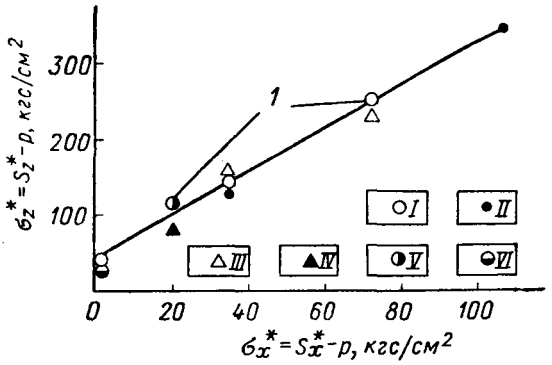



**Рис. 80. Зависимость $\sigma_z^*$ от $\sigma_x^*$:**

*1* — экспериментальные точки.
Значения $p$ в кгс/см$^2$: *I* — 0; *II* — 35,2; *III* — 70,5; *IV* — 106; *V* — 123; *VI* — 141

жений. При существовании нейтрального напряжения (2.1) эффективные напряжения в пористом теле могут быть равны нулю. Эффективные напряжения вызывают изменение конфигурации скелета пористой среды; при определенном значении эффективных напряжений может произойти разрушение пористой среды. Нейтральное же напряжение вызывает лишь сжатие материала пористой среды.

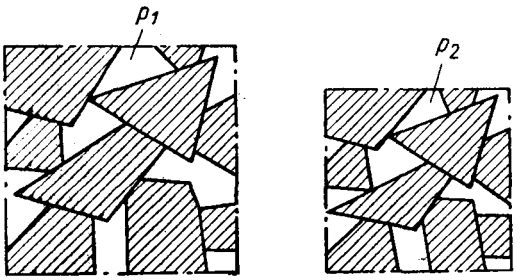



**Рис. 81. Сжатие пористой среды при увеличении давления от $p_1$ до $p_2$.**

Вряд ли можно ожидать разрушения материала пористой среды под действием внутрипорового давления $p$. Поэтому с целью выделения в формуле (2.1) части, связанной с эффективным напряжением, и части, связанной с нейтральным напряжением, необходимо в (2.2) заменить $\sigma'$ на $\Delta + p$. Тогда получим

$$S_z = mp + (\Delta + p)(1 - m) = \Delta(1 - m) + p = \sigma_z + p. \qquad (2.3)$$

Величина $\Delta$ в формуле (2.3) связана с эффективным напряжением, и виду того, что эффективное напряжение есть усилие, отнесенное ко всему участку $a'b'$, величина $\Delta(1 - m)$ заменена на $\sigma_z$. Из формулы (2.3) теперь уже видно, что уменьшение внутрипорового давления $p$ в образце на какую-то величину при неизменном

полном напряжении $S_z$ приводит к увеличению эффективного напряжения $\sigma_z$ на такую же величину.

Это теоретическое положение хорошо подтверждается экспериментальными фактами. Так, разрушение покрытых непроницаемой оболочкой образцов при различных значениях внутрипорового давления $p$ показало [50], что все экспериментальные точки на зависимости предельного эффективного напряжения $\sigma_z^* = S_z^* - p$, при котором происходило разрушение образца, от предельного эффективного напряжения $\sigma_x^* = S_x^* - p$ укладываются практически на одну прямую линию (рис. 80), как это и следует из теории. Согласно экспериментальным данным, показанным на рис. 80, получается, что коэффициент при давлении $p$ равен единице.

Описанные выше эксперименты относятся к разрушению пористых образцов. Если же рассматривать результаты экспериментов по сжимаемости пористых сред, то может показаться, что соотношение (2.3) не выполняется, так как коэффициент при давлении $p$ в формуле (2.3) не равен единице (по результатам многих экспериментов он равен 0,85). Однако соотношение (2.3) справедливо и в этом случае. Дело в том, что поровый объем образца пористой среды зависит не только от эффективного напряжения, но и от нейтрального напряжения, правда, не так сильно, как от эффективного напряжения.

На рис. 81 изображена в крупном масштабе пористая среда при различных значениях нейтрального напряжения $\sigma = p_1$ и $\sigma = p_2$, $p_2 > p_1$, конечно, в сильно увеличенном виде.

При увеличении нейтрального напряжения от $\sigma = p_1$ до $\sigma = p_2$ зерна пористой среды сжимаются и уменьшается поровый объем образца этой среды, как и размеры самого образца. Хотя сжимаемость материала зерен меньше сжимаемости пористой среды от эффективных напряжений, однако она существует.

Изменение порового объема образца можно было бы измерить, поместив не покрытый оболочкой образец в бомбу высокого давления.

Допустим теперь, что измеряется изменение порового объема образца пористой среды, покрытого гибкой непроницаемой оболочкой. В этом случае поровый объем образца будет зависеть главным образом от эффективных напряжений и, в известной степени, от нейтрального напряжения. Поэтому, используя радиально-симметричную систему координат, а также считая зависимость порового объема от напряжений в первом приближении линейной, можно написать для изменения порового объема $\Delta V/V$ следующую формулу:

$$-\frac{\Delta V}{V} = \beta_\sigma \Delta\sigma + \beta_p \Delta p = \beta_\sigma (\Delta S - \Delta p) + \beta_p \Delta p =$$

$$= \beta_\sigma \left[\Delta S - \Delta p \left(1 - \frac{\beta_p}{\beta_\sigma}\right)\right]; \qquad (2.4)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_z + 2\sigma_r}{3}; \quad S = \frac{S_z + 2S_r}{3}.$$

В формуле (2.4) $\beta_\sigma$ — коэффициент изменения (сжимаемости) порового объема от эффективных напряжений, а $\beta_p$ — коэффициент изменения порового объема от нейтрального напряжения. Пусть $\beta_p/\beta_\sigma = 0{,}15$. Тогда из (2.4) имеем $-\Delta V/V = \beta\,(\Delta S - 0{,}85\Delta p)$.

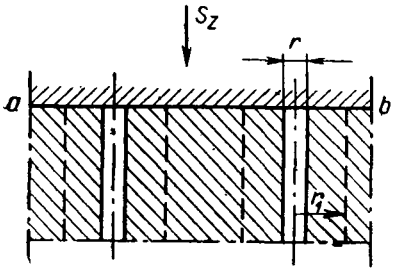



Рис. 82. Пористая среда с узкими каналами

Приведенные выше рассуждения относятся к средам с сильно развитым поровым объемом. У пород кавернозного типа механическое взаимодействие твердого материала и насыщающих породу жидкостей происходит сложнее. Пусть согласно рис. 82 такая порода содержит жидкость лишь в вертикально расположенных «трубочках» радиусом $r$, соприкасающихся с «кровлей» по контакту $ab$. Эти «трубочки» расположены далеко друг от друга, так что при изменении давления жидкости в них изменение сжатия материала среды происходит практически лишь в области $r < r_1$, прилегающей к «трубочке». Тогда изменение давления жидкости не будет вызывать в целом такого же изменения нейтрального напряжения в материале и, следовательно, приведенные выше соотношения не будут выполняться.

Однако дальнейшие рассуждения будут относиться к пористым средам с сильно развитым поровым объемом, поэтому будем основываться на полученных выше формулах. Обобщая эти формулы, полезно представить их в тензорном виде:

$$\mathrm{T}_S = \mathrm{T}_\sigma + \mathrm{T}_p,\quad \mathrm{T}_p = p\mathrm{T}_1, \quad (2.5)$$

где $\mathrm{T}_S$ — тензор полного напряжения; $\mathrm{T}_\sigma$ — тензор эффективного напряжения; $\mathrm{T}_1$ — единичный тензор.

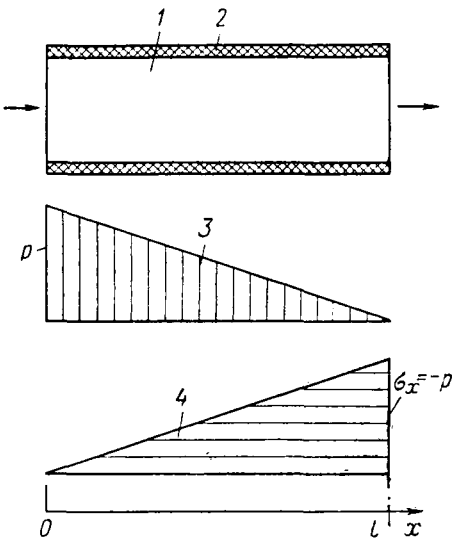



Рис. 83. Действие градиентов давления на пористую среду:

*1* — образец; *2* — непроницаемое покрытие; *3* — эпюра давления $p$; *4* — эпюра эффективного напряжения

Взаимодействие горных пород и насыщающих их жидкостей происходит, естественно, не только когда жидкость находится в покое, но и когда она движется. Если, например, имеем образец пористой среды в форме параллелепипеда (рис. 83), имеющий снаружи непроницаемое покрытие, и к концу образца $x = 0$ приложено

давление жидкости $p$, а на другом конце образца $x = l$ давление жидкости равно нулю, то распределение давления жидкости в порах образца будет согласно закону Дарси представлено эпюрой *3*, показанной на рис. 83. Давление жидкости в образце с ростом координаты $x$ уменьшается, но поскольку давление жидкости создает усилие, которое должно восприниматься материалом пористой среды, в материале пористой среды должно с ростом координаты $x$ увеличиваться эффективное напряжение $\sigma_x$. Рассматривая равновесие сил в произвольном сечении образца, получаем, что распределение напряжения $\sigma_x$ выражается эпюрой *4*, показанной на том же рис. 83, откуда видно, что

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = -\frac{dp}{dx}. \tag{2.6}$$

При рассмотрении взаимодействия горных пород и фильтрующейся в них жидкости также на первый взгляд получается, что поскольку фильтрующаяся жидкость занимает в осредненном единичном сечении породы часть, равную $m$, то как будто на элемент длины породы $\Delta x$ передается усилие $-m\Delta p$. Однако в среде с сильно развитым поровым объемом из-за того, что нейтральное напряжение изменяется на длине $\Delta x$ на величину $-(1-m)\Delta p$, в сумме получаем

$$\Delta\sigma_x = -m\Delta p - (1-m)\Delta p = -\Delta p. \tag{2.7}$$

Конечно, соотношения (2.6) и (2.7) перестают быть справедливыми в случае сред со слабо развитым поровым объемом, таких, например, как среда, показанная на рис. 82.

Из всего сказанного выше следует, что градиенты давления фильтрующейся жидкости действуют на пористую среду как массовая сила, компоненты которой, действующие в направлениях $x$, $y$ и $z$, выражаются следующим образом:

$$X = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в уравнение теории упругости для компонент смещения, написанное в векторной форме, получаем

$$(\lambda + 2\mu')\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \mu'\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} - \operatorname{grad} p = 0. \tag{2.9}$$

Преобразуя уравнение (2.9) с использованием формул векторного анализа, получаем, что, как и в случае отсутствия объемных сил, вектор смещения $\vec{u}$ удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\vec{u} = 0. \tag{2.10}$$

При изучении механического взаимодействия горных пород и фильтрующейся в них жидкости в случае пластической деформации пород выражения (2.8) подставляются в уравнения равновесия, которые решаются с использованием тех же гипотез пластичности, что и при отсутствии массовых сил.

## § 3. ДЕФОРМАЦИЯ ГОРНЫХ ПОРОД В РЕЗУЛЬТАТЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГОРНЫХ ПОРОД И НАСЫЩАЮЩИХ ИХ ЖИДКОСТЕЙ

Использование описанных выше общих соотношений механического взаимодействия горных пород и фильтрующихся в них жидкостей покажем применительно к деформации пород вблизи скважин или стволов шахт, а также при изучении влияния деформации пород на процесс фильтрации жидкости в условиях неупругих режимов пластов.

Выше была рассмотрена деформация непроницаемых горных пород вблизи скважин, когда давление жидкости приложено к поверхности скважины. При деформации пористых и проницаемых

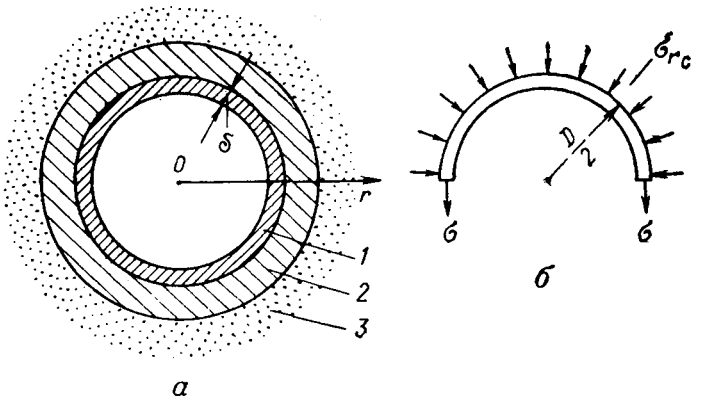



Рис. 84. Действие градиентов давления на породы пласта вокруг ствола обсаженной скважины:

*1* — обсадная труба; *2* — цементное кольцо; *3* — породы пласта

пород в процессе фильтрации содержащихся в них жидкостей или газов на каждый элементарный объем пористой среды действует соответствующая компонента градиента давления жидкости или газа.

Будем также учитывать наличие обсадной стальной трубы (колонны) в скважине [50]. Внешняя поверхность трубы (рис. 84, *а*) скреплена с породами пласта при помощи цемента. В целях упрощения задачи будем считать свойства цемента и свойства пород одинаковыми. Примем также, что жидкость не оказывает давления на обсадную трубу, поскольку она перфорирована и, следовательно, очень хорошо проницаема. Деформацию обсадной трубы будем считать упругой. Очевидно, что в рассматриваемом случае каждому значению нормального напряжения в горных породах $\sigma_{r_c}$, действующего на трубу, будет отвечать определенное значение смещения $u_c$ горных пород вблизи трубы.

В соответствии с рис. 84, *б* получаем следующее соотношение между напряжениями в трубе и в породах при $r = r_c$:

$$\sigma_{r_c} D = 2\delta\sigma. \tag{3.1}$$

Увеличение периметра трубы $\Delta l$ определяется следующим образом:

$$\Delta l = \pi D \frac{\sigma}{E_т}, \tag{3.2}$$

где $E_т$ — модуль Юнга материала трубы.

Учитывая, что $\Delta l = 2\pi u_c$, получаем

$$u_c = K\sigma_{r_c}, \quad K = \frac{D^2}{4\delta E_т}. \tag{3.3}$$

Для той части задачи, которая касается фильтрации, примем следующую схему: в области $r_c \leqslant r \leqslant r_к$ существует установившееся движение жидкости, а при $r \geqslant r_к$ жидкость находится в покое. Такая схема с определенным приближением может соответствовать, например, случаям закачки в пласт жидкости с вязкостью, намного превышающей вязкость пластовой жидкости, или при приближенном рассмотрении неустановившейся фильтрации при упругом режиме. Следовательно, для распределения давления жидкости в пласте имеем формулу

$$\begin{gathered} p = p_c - \frac{\Delta p_c}{\ln \frac{r_к}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c} \text{ при } r_c \leqslant r \leqslant r_к; \\ p = p_к = \text{const при } r \geqslant r_к; \\ \Delta p_c = p_c - p_к. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Считая деформацию пласта плоской, имеем уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\Theta}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{3.5}$$

и уравнение смещений

$$\begin{gathered} \frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) = -\frac{\omega}{r}, \\ \omega = \frac{\Delta p_c}{\lambda + 2\mu'} \ln \frac{r_к}{r_c}. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) имеет решение

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{\omega}{2} r \ln \frac{r}{r_c}. \tag{3.7}$$

Для того чтобы найти постоянные $C_1$ и $C_2$, необходимо выполнить граничное условие (3.3), а также условия

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^0, \\ \sigma_\Theta &= \sigma_\Theta^0, \\ \sigma_z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } r = r_к. \tag{3.8}$$

Напряжения же $\sigma_r^0$ и $\sigma_\theta^0$ находятся из решения Лямэ для полубесконечного цилиндра, которое имеет следующий вид:

$$\sigma_r^0 = -\frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\theta^0 = \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_z^0 = 0. \tag{3.9}$$

Теперь необходимо еще, кроме постоянных $C_1$ и $C_2$, определить постоянную $B$. Однако граничных условий достаточно для определения всех постоянных, так что, выполняя их, получаем

$$C_1 = \frac{\omega}{2}\ln\frac{r_к}{r_c} + \frac{\omega}{4};$$

$$C_2 = \frac{(\lambda+\mu')\,\omega\ln\frac{r_к}{r_c} - \frac{\mu'\omega}{2} - \frac{r_c}{K}\left(\frac{\omega}{2}\ln\frac{r_к}{r_c} + \frac{\omega}{4}\right)}{\frac{1}{Kr_c} + \frac{2\mu'}{r_c^2}}; \tag{3.10}$$

$$B = r_к^2\mu'\left(\frac{2C_2}{r_к^2} + \frac{\omega}{2}\right).$$

Для нормального напряжения, действующего на контакте цемента с обсадной трубой, имеем следующую формулу:

$$\sigma_{r_c} = \Delta p_c\left\{\frac{1}{2(1-\nu)} - \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}\frac{1}{\ln\frac{r_к}{r_c}} - \right.$$
$$- \frac{1}{1+\nu}\frac{1}{\frac{r_c}{KE} + \frac{1}{1+\nu}}\left[\frac{1}{2(1-\nu)} - \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}\frac{1}{\ln\frac{r_к}{r_c}} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\frac{r_c}{KE}\left(1 + \frac{1}{2\ln\frac{r_к}{r_c}}\right)\right]\right\}, \tag{3.11}$$

где $E$ — модуль Юнга пород.

На рис. 85 показана зависимость $\sigma_{r_c}/\Delta p_c$ при $r_к/r_c = 100$ и $\nu = 0{,}2$, из которой видно, что особенно сильно на $\sigma_{r_c}$ влияет величина $r_c/KE$ в пределах ее изменения от 0 до $3 \div 4$, а при $r_c/KE > 20$ величина $r_c/KE$ мало влияет на нормальное напряжение действующее на обсадную трубу. Поскольку $r_c/KE = \delta E_т/r_c E$, то при $r_c = 10$ см, $E_т = 9{,}81\cdot10^{10}$ Па ($10^6$ кгс/см$^2$), $E = 4{,}9\cdot10^{10}$ Па ($5\cdot10^5$ кгс/см$^2$), $\delta = 0{,}8$ см величина $r_c/KE = 0{,}16$. При $E = 0{,}49\times$ $\times\ 10^{10}$ Па ($0{,}5\cdot10^5$ кгс/см$^2$) и тех же остальных условиях $r_c/KE = 1{,}6$. В первом случае, т. е. при $r_c/KE = 0{,}16$, труба оказывает малое влияние на деформацию пласта и можно считать пласт как бы необсаженным. Во втором случае, т. е. при $r_c/KE = 1{,}6$, что соответствует примерно условиям, когда пласт сложен мягкими породами (алевролитами, глинами и т. д.), уже нельзя не учитывать наличия обсадной трубы в скважине при рассмотрении деформации горных пород.

Характер деформации системы обсадная труба — пласт влияет также на величину $\sigma_{r_c}$. Если $r_c/KE$ достаточно мало, т. е., например, породы обладают большим модулем упругости, то при закачке жидкости в пласт обсадная труба будет деформироваться примерно

в той же степени, что и породы пласта, и напряжение $\sigma_{r_c}$, отрывающее трубу от цемента, будет сравнительно невелико. Наоборот, если породы имеют меньший модуль упругости, отрывающее напряжение $\sigma_{r_c}$ может достичь значительной величины.

Представляет интерес описание пластической деформации горных пород под действием градиентов давления фильтрующейся жидкости. Известно, что при строительстве шахт, проходке и эксплуатации нефтяных и газовых скважин создание определенных градиентов давления жидкости в каком-либо пласте, сложенном глинистыми или плохо сцементированными песчаными породами, приводит к тому, что породы разрушаются, «плывут».

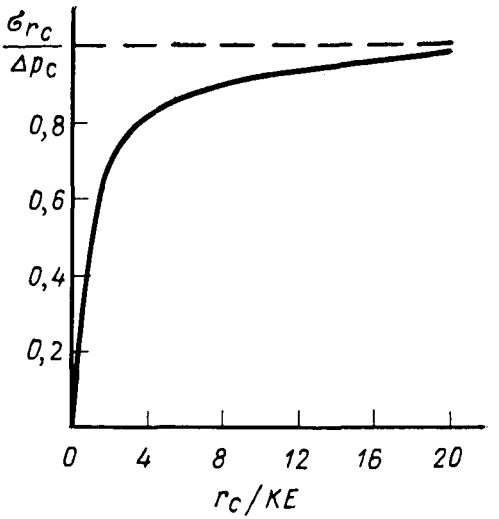


Рис. 85. Зависимость $\sigma_{r_c}/\Delta p_c$ от $r_c/KE$

Напряжения, возникающие при пластической деформации пород, описываются тем же уравнением (3.5), что и при упругой деформации.

Принимая (как и при изучении пластической деформации непроницаемых пород) гипотезу пластичности $(\sigma_r - \sigma_\Theta)/2 = \tau^* = K_п = \text{const}$, а также установившееся распределение давления вида (3.4), но соответствующее случаю движения жидкости от «контура питания» $r_к$ к скважине радиусом $r_c$, и используя граничное условие $\sigma_r = 0$ при $r = r_c$, получаем следующее решение задачи:

$$-\sigma_r = (2K_п - \omega)\ln\frac{r}{r_c};$$

$$-\sigma_\Theta = 2K_п\left(1 + \ln\frac{r}{r_c}\right) - \omega\ln\frac{r}{r_c}; \qquad (3.12)$$

$$\omega = \frac{p_к - p_c}{\ln\frac{r_к}{r_c}}.$$

Радиус разгрузки $r_*$ в этом случае определяется следующей формулой:

$$r_* = 0{,}61 r_c \exp\left(\frac{q_r}{2K_п - \omega}\right). \qquad (3.13)$$

Как видно из (3.12) и (3.13), наличие градиентов давления жидкости в пласте при фильтрации из пласта в скважину как бы уменьшает коэффициент пластичности $K_п$ и способствует большему распространению пластической деформации неустойчивых пород вблизи

скважин. Упругая и пластическая деформация пород при изменении температуры в пластах рассмотрена в работе [79].

Перейдем, наконец, к важному вопросу механического взаимодействия горных пород и фильтрующейся жидкости при упругом режиме пластов. При рассмотрении деформации пород часто принимается, что движение жидкостей в горных породах является установившимся или квазиустановившимся (в каждый произвольно взятый момент времени распределение давления является различным, но соответствующим установившемуся течению). Строго говоря, это не так. На движение жидкости, насыщающей горные породы, оказывает влияние деформация пород — в этом, собственно, и заключается одна из особенностей упругого режима нефтеводоносных пластов.

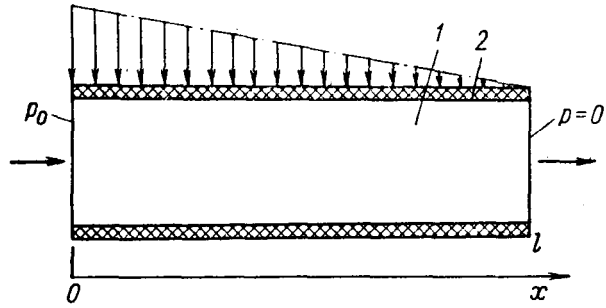



Рис. 86. Действие на пористую среду внешних усилий $S_z = p_0\left(1 - \frac{x}{l}\right) + \text{const}$.

*1* — образец; *2* — гибкая непроницаемая оболочка

Прежде всего необходимо показать, каким образом деформируются породы в процессе движения в них жидкости. Как следует из сказанного выше, эта деформация возникает в основном от двух причин: от изменения эффективных напряжений в породах в результате изменения давления жидкости на контакте кровля — пласт и от действия на породы градиентов давления фильтрующейся жидкости. Поясним более подробно, что это — разные причины.

Эффективные напряжения в породах могут появиться в результате изменения величин в соотношении $S = \sigma + p$ как при наличии, так и при отсутствии движения жидкости. Градиенты давления действуют на горные породы только при наличии движения жидкости. Иногда деформация горных пород при движении в них жидкости может быть обусловлена только действием на породы градиентов давления фильтрующейся жидкости. Например, если фильтрация жидкости происходит из сферической полости в пласт очень большой мощности, не насыщенный жидкостью, движение можно считать центрально-симметричным — тогда не может быть речи о деформации горных пород в результате изменения давления жидко-

сти на контакте кровли и подошвы с пластом. Ведь кровля и подошва находятся очень далеко от сферической полости, а пласт первоначально даже не насыщен жидкостью. Деформация пород обусловлена только градиентами давления фильтрующейся жидкости.

Можно предложить мысленный эксперимент, в котором условно разделяются деформация пород, возникающая в результате действия градиентов давления фильтрующейся жидкости, и деформация пород в результате изменения эффективного напряжения на контакте кровли и подошвы с пластом. Так, если взять образец пористой среды длиной $l$ (рис. 86), покрытый непроницаемой абсолютно гибкой оболочкой, и на конце его поддерживать давление жидкости $p_0$, а при $x = l$ давление жидкости равно нулю, то распределение давления жидкости $p$ будет

$$p = p_0\left(1 - \frac{x}{l}\right). \tag{3.14}$$

Если снаружи к образцу приложить согласно рис. 86 полное напряжение

$$S_z = p_0\left(1 - \frac{x}{l}\right) + \text{const}, \tag{3.15}$$

то в соответствии с соотношением (2.3) предыдущего параграфа эффективное напряжение $\sigma_z$ будет постоянным, например, таким, каким оно было до фильтрации. Градиенты же давления жидкости будут действовать на пористую среду образца.

Из сказанного выше следует, что деформацию пород от действия эффективных напряжений, возникающих из-за появления контактных усилий на границе пласта с кровлей и подошвой, и деформацию от действия градиентов давления фильтрующейся жидкости нужно учитывать раздельно [50]. Поэтому, в принципе, в каждом отдельном случае деформация горных пород по-разному влияет на процесс фильтрации жидкости.

В целом ряде практически важных случаев фильтрации в упругих пластах эффективное среднее нормальное напряжение $\sigma$, возникающее в результате действия на породы градиентов давления фильтрующейся жидкости, зависит от разности давления жидкости $p$ и контурного давления жидкости $p_к$ следующим образом:

$$\sigma = \frac{1}{3}\frac{1+\nu}{1-\nu}(p - p_к). \tag{3.16}$$

На деформацию пласта при упругом режиме, естественно, оказывают большое влияние окружающие пласт породы. Если породы кровли и подошвы пласта более жесткие (имеют более высокое значение модуля Юнга), чем породы самого пласта, то они препятствуют деформации пород пласта, если же породы кровли и подошвы более гибкие, чем породы пласта, то они мало влияют на деформацию пласта. В последнем случае, если считать к тому же, что при действии на пласт контактных усилий каждый элемент пласта не деформируется в горизонтальном направлении вследствие «подпора» со

стороны окружающих элементов, то и от действия контактных усилий в породах возникает точно такое же напряжение, какое определяется формулой (3.16). В этом случае суммарное эффективное напряжение, возникающее в породах при упругом режиме, будет выражаться формулой

$$\sigma = \frac{2}{3}\frac{1+\nu}{1-\nu}(p - p_к). \tag{3.17}$$

При $\nu = 0{,}2$ $\sigma = p - p_к$, а при $\nu = 0{,}3$ $\sigma = 1{,}25\,(p - p_к)$, при $\nu = 0{,}5$ $\sigma = 2\,(p - p_к)$.

Таким образом, иногда в теории упругого режима можно с известным приближением пользоваться коэффициентами сжимаемости пористой среды, полученными в лабораторных условиях, хотя, конечно, лучше определять сжимаемость на основе результатов натурных гидродинамических исследований.

На тех глубинах, где в настоящее время разрабатываются месторождения полезных ископаемых и, в частности, нефтяные и газовые месторождения, породы — коллекторы нефти и газа можно во многих практических случаях считать упругими. При переходе же на бóльшие глубины, а также в тех случаях, когда давление насыщающей породу жидкости близко к горному давлению и, следовательно, сами породы в естественных условиях слабо нагружены, они будут большей частью деформироваться пластически, необратимо, а также будут проявлять свойства текучести.

В случае различной деформации пород при их нагружении и разгрузке движение жидкости в пластах будет происходить при упруго-пластическом режиме, теория которого была дана Г. И. Баренблаттом и А. П. Крыловым [12]. Для этого режима справедливы следующие уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa_1 \nabla^2 p \text{ при } \frac{\partial p}{\partial t} \leqslant 0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa_2 \nabla^2 p \text{ при } \frac{\partial p}{\partial t} \geqslant 0; \tag{3.18}$$

$$\beta_1 = \left(\frac{\partial m}{\partial \sigma}\right)_1; \quad \beta_2 = \left(\frac{\partial m}{\partial \sigma}\right)_2,$$

где $\beta_1$ и $\beta_2$, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — соответственно сжимаемость пород и пьезопроводность при нагружении пород и при разгрузке.

При упруго-пластическом режиме пластическая деформация самой породы в каждом элементарном объеме происходит мгновенно, т. е. текучести породы не наблюдается.

Рассмотрим теперь неустановившуюся фильтрацию жидкости в породах, деформирующихся, как среда Максвелла [50].

Для этой среды можно принять зависимость между эффективной средней деформацией $\varepsilon$ и эффективным средним нормальным напряжением $\sigma$ в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon}{dt} = \beta_м \frac{\partial \sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu_м}, \tag{3.19}$$

где $\beta_м$ и $\mu_м$ — соответственно сжимаемость и вязкость максвелловской среды.

Если пренебречь сжимаемостью материала пористой среды от нейтрального напряжения, то можно положить, что $m = m_0 - \varepsilon$ ($m_0$ — начальная пористость), а $\sigma + p = q_г$. Тогда на основе (3.19) имеем

$$\frac{dm}{dt} = \beta_м \frac{dp}{dt} + \frac{q_г - p}{\mu_м}. \tag{3.20}$$

Используя (3.20) и уравнение неразрывности течения, получаем следующее уравнение реологического режима пласта [50]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \eta\varphi = \varkappa \nabla^2 \varphi; \quad \varphi = q_г - p; \tag{3.21}$$

$$\eta = \frac{1}{\mu_м (m\beta_ж + \beta_с)}; \quad \varkappa = \frac{k}{\mu (m\beta_ж + \beta_с)}.$$

Существуют и другие уравнения реологического режима, определяемые видом деформационного уравнения состояния пластов.

## § 4. МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ ТРЕЩИН В ГОРНЫХ ПОРОДАХ ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ РАЗРЫВЕ ПЛАСТА

В этом параграфе рассмотрим процесс образования и распространения в горных породах единичных «длинных» трещин при вводе в эти трещины жидкости. Процесс образования и развития трещин в горных породах путем закачки в них жидкости, а потом твердого материала с целью удержания трещин от смыкания после прекращения закачки жидкости известен в технике как гидравлический разрыв пласта. Исследованию механизма этого процесса посвящено значительное число работ [13, 25, 30, 43, 44, 45, 71, 138, 139, 147, 151 и др.]. Процессы, аналогичные гидравлическому разрыву, могут протекать и в природе, без вмешательства человека, в результате внедрения магмы и других разжиженных веществ в породы при вулканической деятельности и тектонических движениях земной коры. Трещины, образующиеся в горных породах таким путем, обычно бывают длинными и узкими, так что деформация пород при этом проявляется слабо, поэтому для соответствующих пород ее вполне можно считать упругой.

В механизме распространения трещин в упругих материалах важное значение имеет условие конечности напряжений в концах трещины, известное как условие С. А. Христиановича. Для того чтобы лучше понять смысл этого условия, рассмотрим в качестве примера остроконечную трещину, образовавшуюся в бесконечной упругой плоскости под действием равномерной нагрузки $p$, приложенной к внутренней поверхности трещины. Решение этой задачи, полученное методом Н. И. Мусхелишвили, приведено в главе I.

Не производя подробное вычисление всего поля напряжений, можно показать, что в концах такой трещины, т. е. при $x = \pm l$, напряжения неограниченно возрастают. Например, напряжение $\sigma_y$ на оси $x$ определяется формулой

$$\sigma_y = \frac{2p}{\rho^2 - 1}, \quad x = \frac{l}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right). \tag{4.1}$$

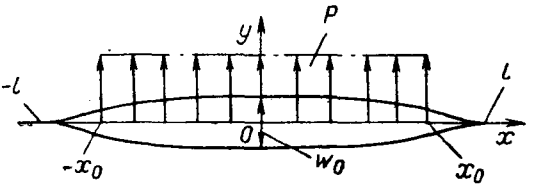



Рис. 87. Вертикальная трещина

Полагая $x/l = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon$ — малая величина), из (4.1) получаем, что при $\varepsilon \to 0$

$$\sigma_y \to \frac{p}{\sqrt{2\varepsilon}}. \tag{4.2}$$

Таким образом, напряжение вблизи конца трещины безгранично возрастает. Поскольку ни один реальный материал не может выдержать бесконечно больших напряжений, трещина, находящаяся только под действием сил, стремящихся ее расширить, будет распространяться неограниченно. Когда же на хрупкий материал, содержащий одну или несколько трещин, действуют две системы сил, одна из которых стремится расширить трещину, а другая — ее сомкнуть, то между размерами трещины и величиной действующих на материал сил может установиться строго определенное соотношение, причем напряжения в концах трещин не будут бесконечно большими, а поверхности трещин будут плавно смыкаться.

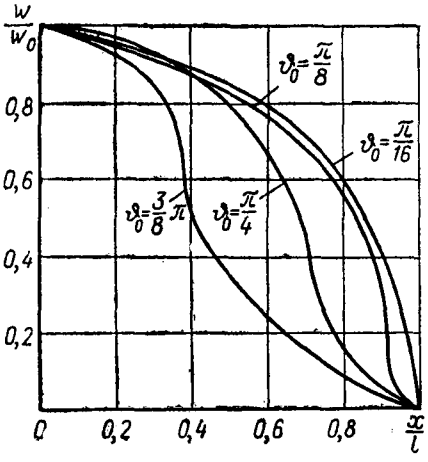



Рис. 88. Зависимость $w/w_0$ от $x/l$ при различных $\vartheta_0$

Если материал с трещиной находится в описанном выше состоянии, это и означает, что в нем выполняется условие С. А. Христиановича.

Вместе с тем, если рассматривается деформация хрупкого материала от двух «противоположно направленных» систем постоянных сил, то для нахождения такого равновесного состояния, при кото-

ром размеры трещин не изменяются, достаточно из всех возможных решений соответствующей задачи выбрать такое, при котором напряжения на концах трещины будут конечными. Это будет означать, что найдено решение, при котором выполняется условие С. А. Христиановича.

Нужно сказать, что не при всяких противоположно направленных системах сил может существовать в материале равновесное состояние, при котором трещина будет иметь установившиеся конечные размеры. В одних случаях трещина может «выйти» за пределы материала, в котором она образуется, в других она окажется сомкнутой. Например, если на плоскость с трещиной действуют сжимающие силы $q_\infty$, приложенные на бесконечно большом расстоянии от концов трещины, то условием конечности напряжений в концах трещины будет $p = q_\infty$. Однако трещина оказывается при этом сомкнутой, т. е. всюду на ее контуре смещение $v = 0$.

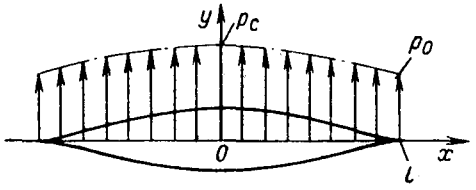



Рис. 89. Образование вертикальной трещины под воздействием давления, изменяющегося по параболическому закону

Иная картина получается, если в плоскости, сжатой на бесконечности напряжением $q_\infty$, имеется вертикальная трещина длиной $2l$, внутренние поверхности которой находятся под постоянным давлением $P$, приложенным на участке трещины при $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$ (рис. 87). В этом случае трещина в бесконечной плоскости находится в равновесном состоянии и ее размеры определяются следующей формулой, получаемой в результате выполнения условия конечности напряжения в концах трещины:

$$\frac{P}{q_\infty} = \frac{1}{1 - \dfrac{2 \arccos \dfrac{x_0}{l}}{\pi}}. \tag{4.3}$$

Максимальная ширина трещины $w_0$ будет в точке $x = y = 0$. Она определяется формулой [45]

$$w_0 = \frac{4(1-\nu^2)\, l q_\infty}{E} \frac{\cos \vartheta_0}{\pi - 2\vartheta_0} \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\vartheta_0}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left|\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\vartheta_0}{2}\right)\right|}, \tag{4.4}$$

$$\vartheta_0 = \arccos \frac{x_0}{l}.$$

На рис. 88 показана форма вертикальных трещин в виде зависимостей $w/w_0 = f(x/l)$ при различных $\vartheta_0$, из которой видно, что поверхности трещин в их концах смыкаются плавно, т. е. $\partial w/\partial x = 0$ при $x = \pm l$. Из формулы (4.3) следует, что при $x_0/l = 1$ $P/q_\infty = 1$,

при $x_0/l = 0$ $P/q_\infty \to \infty$, а например, при $x_0/l = 0{,}5$ величина $P/q_\infty = 3$.

Равновесное состояние трещины в первоначально сжатом материале может иметь место не только в тех случаях, когда постоянная нагрузка, действующая на внутреннюю поверхность трещины, приложена на части поверхности трещины, но и когда эта нагрузка действует на всю поверхность трещины, но изменяется с изменением координаты. Например, если к внутренней поверхности той же трещины (рис. 89), находящейся в упругой бесконечной плоскости, сжатой на бесконечности напряжением $q_\infty$, приложено давление, изменяющееся по параболическому закону

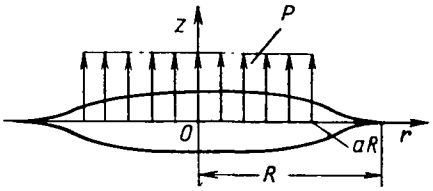



Рис. 90. Горизонтальная трещина

$$p(x) = p_c - (p_c - p_0)\frac{x^2}{l^2}, \tag{4.5}$$

то трещина также будет находиться в равновесном состоянии.

Условием конечности напряжений в концах трещины в этом случае является следующее соотношение [50]:

$$\frac{p_c + p_0}{2} = q_\infty. \tag{4.6}$$

Ширина трещины определяется формулой [50]

$$w = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)\Delta p_c l}{E}\left(1 - \frac{q_\infty}{p_c}\right)\left(\sin\vartheta - \frac{1}{3}\sin 3\vartheta\right), \tag{4.7}$$

$$\vartheta = \arccos\frac{x}{l}.$$

Рассмотрим теперь образование осесимметричных трещин. Пусть в упругом материале, занимающем все пространство, находится горизонтальная трещина круговой формы (рис. 90) и к внутренней поверхности трещины симметрично относительно оси $z$ приложено постоянное давление $P$ на участке от $r = 0$ до величины радиуса, равного $aR$ ($R$ — радиус трещины). На бесконечно большом расстоянии от конца трещины материал сжат горным давлением $q_г$.

В результате решения соответствующей задачи теории упругости и выполнения условия конечности напряжений в конце трещины получается следующая зависимость [13]:

$$\frac{q_г}{P} = 1 - (1-a^2)^{1/2}. \tag{4.8}$$

Максимальная ширина трещины $w_0$ получается, естественно, в точке $r = 0$, причем [13]

$$w_0 = \frac{8(1-\nu^2)PR}{\pi E}\, a \arccos a. \tag{4.9}$$

В аналогичном случае, когда нагрузка на внутреннюю поверхность осесимметричной горизонтальной трещины распределена по параболическому закону, а все остальные условия — те же, что и в предыдущем случае, имеем следующее соотношение, отражающее условие конечности напряжений в конце трещины [50]:

$$p_c - q_г = \frac{2}{3}(p_c - p_0). \tag{4.10}$$

В (4.10) $p_c$ — давление в точке $r = 0$, а $p_0$ — давление в точке $r = R$.

Ширина трещины $w$ определяется формулой [50]

$$w = \frac{16}{3}\frac{(1-\nu^2)(p_c - q_г)R}{\pi E}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{3/2}. \tag{4.11}$$

На рис. 91 показана форма трещины согласно зависимости (4.11), где $w_0$ — максимальная ширина трещины при $r = 0$.

Приведенные выше решения позволяют хорошо описать процесс распространения трещин при гидравлическом разрыве пластов. Однако, помимо деформации пород, при описании гидравлического разрыва пластов необходимо учитывать также гидравлические закономерности.

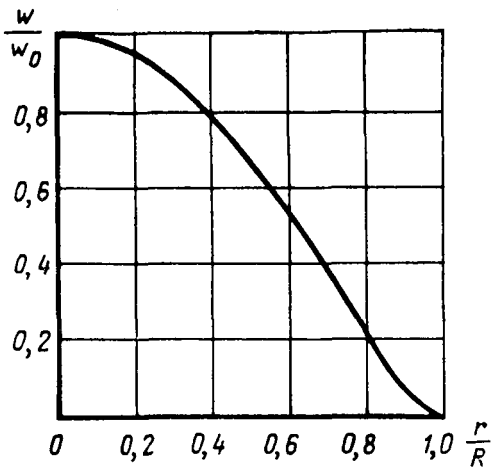


Рис. 91. Зависимость $w/w_0$ от $r/R$

Рассмотрим, например, процесс распространения горизонтальной трещины (рис. 92), образующейся в результате закачки в нее нефильтрующейся жидкости или, что то же, когда горные породы, в которых развивается трещина, являются непористыми и непроницаемыми.

По стволу скважины *1*, показанной на рис. 92, закачивается жидкость в трещину *2*, в результате чего радиус горизонтальной трещины $R$ увеличивается, а также изменяются ширина трещины $w$ и давление жидкости в трещине $p$. Горные породы сжаты сверху горным давлением $q_г = \rho_г g H$.

Поскольку жидкость является абсолютно нефильтрующейся, следует полагать, что она не может дойти до самого конца трещины, где ширина трещины равна нулю, а доходит лишь до радиуса $R_0 < R$.

Обобщая известный закон движения жидкости в щели применительно к трещине переменной ширины $w = w(r)$ и радиальному движению жидкости, получаем

$$v = -\frac{w^2(r)}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial r}. \qquad (4.12)$$

Отсюда имеем следующее уравнение для расчета изменения давления жидкости вдоль горизонтальной трещины (см. рис. 92):

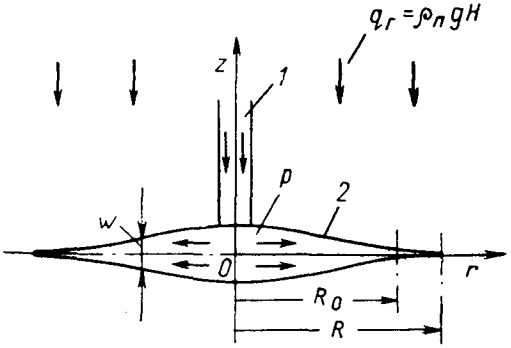



Рис. 92. Образование горизонтальной трещины путем закачки в нее нефильтрующейся жидкости:

*1* — скважина; *2* — трещина

$$\frac{6Q\mu}{\pi}\frac{dr}{rw^3(r)} = -dp, \qquad (4.13)$$

где $Q$ — расход закачиваемой в трещину жидкости.

Совместное решение задачи теории упругости и гидравлики показывает, что с течением времени $t$ величина давления жидкости в скважине $p(t)$ приближается к величине вертикальной компоненты горного давления $q_г$, но никогда не сравнивается с ней.

Давление жидкости в скважине при малых $p_с - q_г$ определяется формулой [43]

$$\left(\frac{p_с - q_г}{E}\right)^3 \frac{p_с - q_г}{p_с} = 0{,}0463\frac{(1+\nu^2)^2}{E}\frac{Q\mu}{V_ж}, \qquad (4.14)$$

где $V_ж$ — объем жидкости в трещине.

Между объемом жидкости в трещине $V_ж$ и радиусом трещины также при малых $p_с - q_г$ существует зависимость

$$V_ж = \frac{5(1-\nu^2)(p_с - q_г)}{E}R^3, \qquad (4.15)$$

а максимальная ширина трещины

$$w_0 = \frac{8(1-\nu^2)(p_с - q_г)R}{\pi E}. \qquad (4.16)$$

Так же определяются параметры вертикальной трещины, образующейся при закачке в нее абсолютно нефильтрующейся жидкости. В этом случае давление жидкости в скважине $p_с$ при малых величинах $p_с - q_\infty$ зависит от объема введенной в трещину жидкости $V_ж$ и других параметров следующим образом [45]:

$$\frac{p_с}{q_\infty}\left(\frac{p_с}{q_\infty} - 1\right)^3 = 5{,}25\frac{1}{(1-\nu^2)^2}\left(\frac{E}{q_\infty}\right)^2\frac{Q\mu}{q_\infty V_ж}. \qquad (4.17)$$

Аналогично максимальная ширина трещины и ее полудлина определяются формулами

$$w_0 = \frac{4(1-\nu^2)\,l}{E}(p_c - q_\infty);$$
$$l = \left[\frac{V_ж E}{5{,}6(1-\nu^2)\,h\,(p_c - q_\infty)}\right]^{1/2}, \qquad (4.18)$$

где $h$ — мощность пласта.

Если жидкость, закачиваемая в пласт для распространения трещины, фильтрующаяся, то распространение трещин при гидравлическом разрыве пласта получается иным. Теперь уже нельзя полагать, что жидкость не может дойти до конца трещины, поэтому давление жидкости в конце трещины совсем не обязательно должно быть равно нулю.

Самое же главное в механизме образования трещин при помощи фильтрующейся жидкости заключается в том, что деформация пород при этом происходит под действием на породы поля градиентов давления фильтрующейся жидкости. Кроме того, более сложными являются гидравлические зависимости в самой трещине, так как жидкость не только движется по трещине, но и постепенно отфильтровывается в пласт.

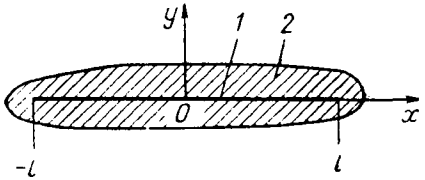



Рис. 93. Образование трещины путем закачки в нее фильтрующейся жидкости:

*1* — трещина; *2* — профильтровавшаяся жидкость

Однако в некоторых случаях можно существенно упростить задачу об образовании трещин.

Рассмотрим, например, образование трещин в пористых и проницаемых породах при помощи фильтрующейся жидкости, вязкость которой намного превышает вязкость пластовой жидкости. Кроме того, примем, что вязкая жидкость профильтровывается в пласт на сравнительно небольшое расстояние от поверхностей трещины, как это показано на рис. 93. Тогда можно полагать, что практически трещина образуется под действием усилия, приложенного к поверхности трещины, однако давление жидкости, или теперь уже перепад давления жидкости, не равно нулю в конце трещины.

Таким образом, в качестве решения задачи теории упругости можно использовать приведенное выше решение об образовании вертикальной трещины под действием усилия (4.5). Если теперь при рассмотрении фильтрации жидкости приближенно считать, что расход жидкости, когда давление в трещине изменяется по закону (4.5), равен расходу жидкости при постоянном давлении в трещине, то можно использовать следующее решение задачи фильтрации:

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi}\ln\zeta, \quad z = \frac{l}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \qquad (4.19)$$
$$\zeta = \rho e^{i\Phi},$$

где $\Phi$ — комплексный фильтрационный потенциал.

Если размеры области, занятой профильтровавшейся в пласт жидкостью в соответствии с рис. 93, малы, то, рассматривая совместно задачу теории упругости и фильтрации, получаем следующие выражения [50] для определения полудлины трещины $l$ и ее максимальной ширины $w_0$:

$$l = \left(\frac{V_ж Q \mu}{2\pi^2 h^2 m k q_\infty}\right)^{1/2}; \qquad (4.20)$$

$$w_0 = \frac{4(1-2\nu)(1+\nu)(\Delta p_c - q_\infty)}{3E}\left(\frac{V_ж Q \mu}{2\pi^2 h^2 m k q_\infty}\right)^{1/2}.$$

В аналогичном случае образования горизонтальной трещины при помощи фильтрующейся жидкости используется решение задачи теории упругости о действии давления на поверхности трещины, распределенного по параболическому закону. Считая, что вязкая жидкость отфильтровывается от горизонтальной трещины симметрично и достигает радиуса $r_к$, получаем зависимость между объемом закачанной жидкости $V_ж$, радиусом трещины $R$ и другими параметрами в следующей форме [50]:

$$\frac{Q^3\mu^3}{48\pi^2 k^3 (q_г - p_к)^3 V_ж} = f\left(\frac{3V_ж}{4\pi m R^3}\right). \qquad (4.21)$$

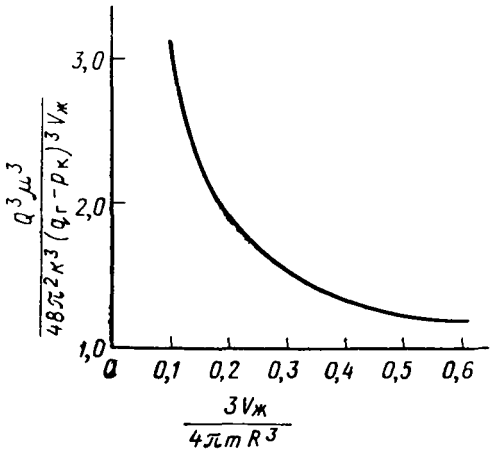



Рис. 94. Зависимость параметра $\frac{Q^3\mu^3}{48\pi^2 k^3 (q_г - p_к)^3 V_ж}$ от параметра $\frac{3V_ж}{4\pi m R^3}$

Эта зависимость представлена на рис. 94. В приведенной выше постановке задач об образовании трещин при помощи фильтрующейся жидкости фактически не принималось во внимание действие на пласт градиентов давления фильтрующейся жидкости, так как считалось, что размер области, занятой профильтровавшейся в пласт жидкостью, мал по сравнению с размерами трещин. Покажем на простом примере, в каких случаях можно так считать. Пусть имеем два образца пористой среды цилиндрической формы, составленные вместе соответственно рис. 95 и сжатые с торцов давлением $q_\infty$, имитирующим боковое горное давление. Допустим также, что каким-то образом в оба образца в место их соприкосновения (в плоскость $x = 0$) подается жидкость и в пределах области, занятой профильтровавшейся жидкостью $0 \leqslant |x| \leqslant x_0|$, происходит установившаяся фильтрация и, следовательно, на пористую среду обоих

образцов действуют градиенты давления фильтрующейся жидкости, вызывая в пористой среде распределение давления и сжимающего напряжения, показанное на эпюре рис. 95.

Нетрудно показать, что полное смещение $u_1$ (изменение расстояния между торцами) у одного из образцов, если его сжать давлением, равным $q_\infty$, будет $u_1 = q_\infty l/E$. Когда же на образец действует давление фильтрующейся жидкости в соответствии с эпюрой рис. 95, смещение в плоскости $x = 0$ будет $u_2 = \Delta P_c/E\,(l - x_0/2)$. Разъединение образцов в плоскости $x = 0$ (раскрытие «трещины») наступит, когда $u_1 = u_2$. Тогда будет

$$\Delta p_c = \frac{q_\infty}{1 - \frac{x_0}{2l}}. \qquad (4.22)$$

Из этого простого примера видно, что при $x_0 \ll l$ $\Delta p_c \approx q_\infty$, а при больших $x_0/l$ для начала раскрытия трещины потребуется

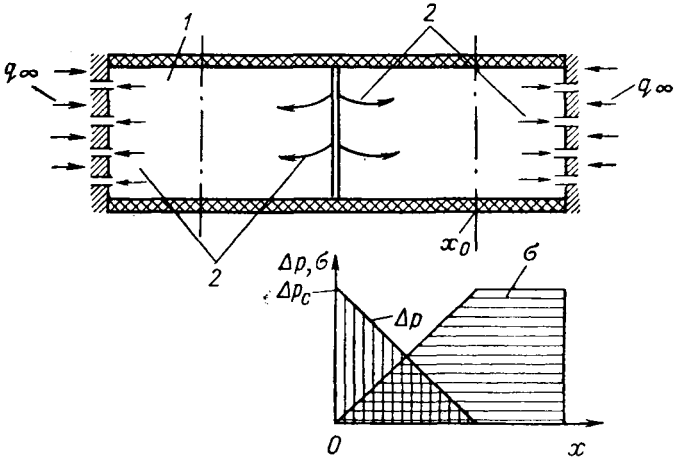



Рис. 95. Образование щели в пористой среде под воздействием фильтрующейся жидкости:

*1* — образец пористой среды; *2* — направление фильтрации жидкости

$\Delta p_c > q_\infty$. Изложенная выше схема образования трещин в пластах при помощи фильтрующейся жидкости относится к случаю $x_0/l \ll 1$.

Выше уже было сказано о том, что процессы образования трещин могут протекать в природе и технике в самых разнообразных условиях.

Можно также воспроизводить процессы образования трещин на моделях. Поэтому приведем некоторые сведения о подобии рассматриваемых процессов.

Анализ подобия процессов распространения трещин показывает, что для того, чтобы два процесса образования трещин посредством закачки в трещины нефильтрующейся вязкой жидкости были подоб-

ными, необходимо соблюдение в этих процессах равенства параметра [50]

$$N_1 = \frac{q^3 t}{E^2 \mu}, \tag{4.23}$$

где $q$ — горное давление (в случае образования горизонтальных трещин $q = q_г = \rho_п g H$, а при образовании вертикальных трещин $q = q_\infty$).

Поскольку объем нефильтрующейся жидкости в трещине $V_ж = Qt$, а $V_ж \approx l^3$ ($l$ — длина трещины), из параметра $N_1$ получаем [50]

$$\frac{q^3 t}{E^2 \mu} = \frac{q^3 l^3}{Q \mu E^2}. \tag{4.24}$$

Допустим теперь, что построена модель из упругого хрупкого материала, свойства которого такие же, что и у горных пород, где проводится процесс гидравлического разрыва пласта. На модели же решено воспроизвести процесс распространения трещин в горных породах при закачке в трещины нефильтрующейся жидкости. Линейные размеры модели в 100 раз меньше линейных размеров в реальных условиях, т. е. предполагается, например, образовать в модели трещину, длина которой должна быть в 100 раз меньше длины трещины в реальных условиях, т. е. в натуре. Предположим, что модель сжимается под действием горного давления, равного горному давлению в натуре. Тогда из параметра (4.24) получаем

$$(Q\mu)_м = (Q\mu)_н \cdot 10^{-6}. \tag{4.25}$$

Индексы «м» и «н» относятся соответственно к модели и натуре.

Таким образом, при данных условиях величина $Q\mu$ в модели должна быть уменьшена по сравнению с реальными условиями в миллион раз.

Допустим теперь, что каждая из величин $Q\mu$, $q$ и $l$ в модели уменьшена в $10^{-2}$ раз по сравнению с натурой и необходимо выбрать в модели модуль Юнга $E_м$. Тогда из (4.24) получаем, что должно быть выполнено условие

$$E_м = 10^{-5} E_н. \tag{4.26}$$

Следовательно, практически воспроизвести рассматриваемый процесс распространения трещин в модели возможно, если модельный материал, в котором должна распространяться трещина, будет очень сильно сжимаемым.

Если процесс образования трещин протекает в пористом и проницаемом материале, а жидкость фильтрующаяся, то для соблюдения подобия процессов распространения трещин необходимо, чтобы кроме параметра $N_1$ еще было соблюдено равенство в рассматриваемых случаях параметра

$$N_2 = \frac{k^3 E^3}{q Q^2 \mu^2}. \tag{4.27}$$

Выше при рассмотрении процессов распространения трещин в горных породах считалось, что еще до начала этих процессов в породах как бы уже существуют «начальные» трещины, т. е. не учитывался сам разрыв породы. Кроме того, из физики образования трещин в хрупких материалах известно, что даже если есть некоторая начальная трещина в материале, не сжатом внешними усилиями, для распространения этой трещины необходимо прикладывать к материалу определенное «разрывающее» усилие, потому что в концах трещины действуют молекулярные силы сцепления, которые нужно преодолевать.

Решение задачи теории упругости об образовании вертикальной трещины под действием нагрузки, равномерно распределенной на части внутренней поверхности трещины, с учетом действия молекулярных сил сцепления в концах трещины позволяет получить, в результате выполнения условия С. А. Христиановича, вместо соотношения (4.3) следующее соотношение [50]:

$$\arcsin\frac{x_0}{l}=\frac{\pi}{2}\frac{q_\infty}{P}+\frac{K}{P\sqrt{2l}}, \tag{4.28}$$

где $K$ — модуль сцепления, введенный Г. И. Баренблаттом [14].

Вычисления по формуле (4.28) показывают, что для длин трещин, образующихся в реальных процессах гидравлического разрыва пласта, исчисляющихся десятками метров, величина $K/P\sqrt{2l}$, характеризующая действие сил сцепления, составляет 2—5% от величины $\pi/2\cdot q_\infty/P$, отражающей действие горного давления на процесс распространения трещин. Видимо, при реальных гидравлических разрывах пластов можно не учитывать влияние на процесс распространения трещин сил сцепления. При хрупком же разрушении не нагруженных горным давлением пород силы сцепления играют решающую роль.

Необходимо отметить еще один интересный факт, вытекающий из механизма образования трещин в горных породах. Из предыдущего следует, что для того, чтобы в насыщенном жидкостью пласте начала образовываться горизонтальная трещина под действием фильтрующейся жидкости, необходимо преодолеть вертикальное горное давление (при отсутствии его разгрузки).

Для того же, чтобы в этом пласте начала образовываться вертикальная трещина, необходимо, чтобы не давление жидкости превзошло боковое горное давление, а перепад давления, т. е. разность между давлением жидкости в скважине и пластовым давлением. Следовательно, давление начала образования горизонтальной трещины не зависит от величины пластового давления, в то время как давление начала образования вертикальной трещины зависит от величины пластового давления. Этот факт может быть использован для суждения об ориентации трещин, образующихся в горных породах, например, в результате гидравлического разрыва пласта.

## ГЛАВА V

# ПОДЗЕМНАЯ ТЕРМОГИДРОДИНАМИКА

### § 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ

При разработке нефтегазоносных пластов содержащиеся в них жидкости и газы могут приобрести температуру, отличающуюся от естественной температуры пластов. Большей частью изменение температурного поля месторождений бывает связано с искусственным воздействием на пласты путем закачки воды, пара, осуществлением подземного горения и т. д. Для того чтобы температура пласта изменилась существенно, необходимо довольно сильное изменение термодинамических условий в пласте, поскольку породы-коллекторы, а также окружающие пласт породы обладают значительной тепловой емкостью. Небольшие перетоки тепла от пород-коллекторов к их содержимому и наоборот не вызывают сколько-нибудь заметных изменений температуры пластов, и поэтому в этих случаях процессы, связанные с разработкой недр, вполне обоснованно считают изотермическими. При сильных тепловых воздействиях на пласты необходимо существенным образом учитывать термодинамическую обстановку в пластах. Многие процессы, возникающие при разработке пластов, являются необратимыми. К ним относятся процессы теплопроводности, вязкого трения, диффузии и др. Для их описания требуется использовать представления термодинамики необратимых процессов [35]. Однако вначале необходимо изложить представления классической термодинамики.

Фундаментальным положением термодинамики является первое начало термодинамики. Оно формулируется следующим образом:

$$\delta Q = dU + \delta W. \tag{1.1}$$

В выражении (1.1) $\delta Q$ — элементарное количество тепла, переданное телу как термодинамической системе; $dU$ — дифференциал внутренней энергии системы; $\delta W$ — элементарное количество работы произведенной системой. Равенство (1.1) выражает закон сохранения энергии. В этом равенстве $dU$ является полным дифференциалом переменных $p$, $V$, $T$ (давление, удельный объем, абсолютная температура), характеризующих состояние системы, из которых любые две переменные можно считать независимыми. Величины

$\delta Q$ и $\delta W$ не являются полными дифференциалами. Следовательно, из трех величин, входящих в (1.1), функцией состояния является только внутренняя энергия системы $U$. Теплота $Q$ и работа $W$ не являются функциями состояния.

Дифференциальное выражение (1.1) имеет интегрирующий множитель $\frac{1}{T}$. После умножения (1.1) на $\frac{1}{T}$ получаем

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{\delta W}{T}. \tag{1.2}$$

Выражение $dS = \delta Q/T$ теперь является полным дифференциалом, а сама функция $S$, называемая энтропией, есть функция состояния. В термодинамических системах можно осуществить процессы, при протекании которых параметры состояния системы будут меняться таким образом, что в некоторый момент времени они примут исходные значения. В таких случаях говорят, что система совершает замкнутый цикл. Если такой цикл осуществляется в изолированной термодинамической системе и является обратимым, то энтропия системы в конце цикла оказывается равной энтропии системы в начале цикла, т. е. энтропия остается неизменной. При завершении замкнутого цикла в необратимом процессе энтропия изолированной системы всегда возрастает. Таким образом, имеем

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \geqslant 0. \tag{1.3}$$

В этом выражении интегралом с кружком обозначается интеграл по замкнутому циклу, который для необратимого процесса всегда положителен, а для обратимого равен нулю. Выражение (1.3) является формулировкой второго начала термодинамики.

Важное значение в термодинамике имеет понятие энтальпии $i$, определяемой в дифференциальной форме следующим образом:

$$di = dU + d(pV). \tag{1.4}$$

Первую производную количества тепла $Q$ по абсолютной температуре $T$ называют теплоемкостью. Различают теплоемкость при постоянном удельном объеме $c_V$ и теплоемкость при постоянном давлении $c_p$. Эти теплоемкости связаны между собой.

Для того чтобы получить зависимость теплоемкости $c_V$ от теплоемкости $c_p$, необходимо использовать дифференциальные соотношения между термодинамическими величинами.

На основе уравнения состояния вещества можно написать

$$p = p(V, T),\ V = V(p, T),\ T = T(p, V). \tag{1.5}$$

Из (1.5), следует, что

$$\left.\begin{aligned} dp &= \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT; \\ dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT; \\ dT &= \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Производные при зафиксированном значении $p$, $V$ и $T$ в термодинамике принято заключать в круглые скобки и использовать соответствующие индексы $p$, $V$ и $T$, как это сделано в выражениях (1.6).

Подстановкой второго выражения (1.6) в первое и сравнением с исходным выражением получаем соотношение

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V. \tag{1.7}$$

Поскольку энтропия есть функция состояния, можно написать

$$S = S(p,\ V) = S(T,\ p) = S(T,\ V). \tag{1.8}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p dV; \\ dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp; \\ dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV. \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Из выражений (1.9) получается следующее соотношение между термодинамическими величинами:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V. \tag{1.10}$$

Используя выражение для энтропии (1.2) и определение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме, имеем

$$c_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p, \quad c_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V. \tag{1.11}$$

Из (1.10) и (1.11) получаем

$$c_V = c_p + T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V. \tag{1.12}$$

Рассмотрим теперь термодинамический потенциал Гиббса Ф для системы с постоянным числом частиц, определяемый в дифференциальной форме следующим образом:

$$d\Phi = d(U - TS + pV). \tag{1.13}$$

Будем учитывать только работу, производимую расширяющимся веществом, т. е. считать, что $W = Vdp$. Тогда получим

$$d\Phi = -S\,dT + V\,dp, \tag{1.14}$$

Сравнивая (1.14) с выражением для полного дифференциала Ф

$$d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T dp, \tag{1.15}$$

имеем

$$S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p, \quad V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T. \tag{1.16}$$

Дифференцируя выражения (1.16), можно показать, что

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{1.17}$$

Подставляя (1.17) в (1.12), получаем зависимость между $c_p$ и $c_V$, в которую входят только параметры $p$, $V$ и $T$, связанные уравнением состояния

$$c_p - c_V = T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V. \tag{1.18}$$

Используя вторую формулу из (1.9), выражение для $dT$ из (1.6), а также соотношение (1.18), получаем выражение для дифференциала энтропии

$$dS = \frac{c_p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV + \frac{c_V}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp. \tag{1.19}$$

Приведенные выше формулы можно применять для определения взаимосвязи между параметрами, характеризующими различные тепловые процессы, происходящие в рассматриваемой массе вещества, если известно уравнение состояния вещества.

В качестве примера рассмотрим работу, производимую изотермически расширяющимся идеальным газом ($T = \text{const}$, $pV = \text{const}$). Имеем следующее выражение для работы:

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV, \tag{1.20}$$

где $V_0$ — начальный, а $V_1$ — конечный объемы идеального газа.

В рассматриваемом примере

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV = RT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_0 \ln \frac{V_1}{V_0} = p_0 V_0 \ln \frac{V_1}{V_0}. \tag{1.21}$$

Работа $W$, производимая изобарически расширяющимся идеальным газом ($p = p_0 = \text{const}$), определяется очень просто:

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p_0\,dV = p_0 (V_1 - V_0). \tag{1.22}$$

Важное значение в различных технических приложениях имеет понятие адиабатического процесса, при котором отсутствует подвод или отвод тепла к системе и, следовательно, энтропия не меняется. Из формулы (1.19) в этом случае получаем

$$\frac{c_p}{c_V}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = -\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp. \tag{1.23}$$

Если снова взять идеальный газ, то из (1.23) будем иметь

$$\lambda p\, dV = -V\, dp,\ \lambda = \frac{c_p}{c_V}. \tag{1.24}$$

В результате интегрирования (1.24) получаем уравнение адиабаты

$$pV^{\lambda} = \text{const}. \tag{1.25}$$

Многие процессы сжатия и расширения газов, происходящие на практике, не являются строго адиабатическими, а газы не являются идеальными. Поэтому показатель при удельном объеме в формуле (1.25) не равен в точности $c_p/c_V$. Происходящий при этом процесс называют политропическим. Его уравнение записывают в виде:

$$pV^n = \text{const}, \tag{1.26}$$

где $n$ — показатель политропы.

Вычислим работу, затрачиваемую на политропическое сжатие газа. Имеем

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\, dV = p_0 V_0^n \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V^n} = \frac{p_0 V_0}{n-1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right]. \tag{1.27}$$

В качестве примера определим с учетом формулы (1.27) затраты тепла, требующегося для сжатия 1 м$^3$ газа от $10^5$ Па до $200 \cdot 10^5$ Па, т. е. для сжатия 1 м$^3$ газа при $n = 1{,}3$ от начального давления $p_0$ около 1 кгс/см$^2$ до конечного давления $p_1 \approx 200$ кгс/см$^2$. По формуле (1.27) получается, что на это затрачивается работа, равная $8 \cdot 10^5$ Дж $\approx$ $\approx 8 \cdot 10^4$ кгс·м, что эквивалентно 190 ккал.

Сравним теперь работу адиабатического сжатия газа с работой изотермического сжатия 1 м$^3$ газа от 1 до 200 кгс/см$^2$.

По формуле (1.21) получаем $W = 5{,}3 \cdot 10^5$ Дж $\approx 5{,}3 \cdot 10^4$ кгс·м = = 127 ккал. Большое различие в затратах энергии на адиабатическое и изотермическое сжатие газа объясняется тем, что при изотермическом процессе от сжимаемого газа непрерывно отводится тепло и давление при уменьшении объема газа растет более медленно, чем при адиабатическом сжатии газа, который при этом сильно нагревается.

Существенное значение в технике имеет дросселирование газов и жидкостей при постоянной энтальпии (эффект Джоуля — Том-

сона), играющее важную роль и при движении газов и жидкостей в пористых и трещиноватых породах в подземных условиях.

Из определения энтальпии имеем

$$di = T\,dS + V\,dp. \tag{1.28}$$

Будем полагать, учитывая (1.28), что $i = i\,(S,\ p)$. Из предыдущего следует также, что $T = T\,(p,\ V)$; $S = S\,(p,\ V)$.

Отсюда $T = T\,(p,\ i)$ и для дифференциала температуры можно написать выражение

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i dp + \left(\frac{\partial T}{\partial i}\right)_p di. \tag{1.29}$$

При постоянной энтальпии из (1.28) и (1.29) имеем

$$T\,dS = -V\,dp,\ dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i dp. \tag{1.30}$$

Используя (1.9) и (1.17), из (1.30) получаем

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i = -\frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V}{c_p}. \tag{1.31}$$

Величина $-(dT/dp)_i$ называется коэффициентом Джоуля — Томсона.

Возьмем теперь эмпирическое уравнение состояния реального газа

$$pV = z\,(p,\ T)\,RT. \tag{1.32}$$

Подставляя (1.32) в (1.31), получаем следующее выражение для коэффициента Джоуля — Томсона:

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i = -\frac{RT^2}{pc_p}\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p. \tag{1.33}$$

Из уравнения (1.33) следует, что если газ является идеальным и $z = 1$, то $(\partial T/\partial p)_i = 0$. Для реальных же газов изменение температуры с изменением давления при постоянной энтальпии $i$ будет отличаться от нуля.

Обозначим коэффициент термического расширения вещества при постоянной температуре $\alpha_p$. По определению,

$$\alpha_p = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{1.34}$$

Из (1.31) и (1.34) имеем

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i = \frac{V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{c_p} = \frac{V}{c_p}(1 - \alpha_p T). \tag{1.35}$$

Если $\alpha_p\,T < 1$, то согласно (1.35) с уменьшением давления при дросселировании температура вещества уменьшается. При $\alpha_p\,T > 1$

температура дросселируемого вещества растет с уменьшением давления. Если $\alpha_p T = 1$, то коэффициент Джоуля — Томсона равен нулю. Температура, соответствующая $-(dT/dp)_i = 0$, называется температурой инверсии. Для воздуха, например, температура инверсии составляет 600 К. Следовательно, при $T < 600$ К температура воздуха при дросселировании падает. Для водорода же температура инверсии равна 200 К, и при $T > 200$ К водород при дросселировании нагревается.

## § 2. УРАВНЕНИЕ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ ПОДЗЕМНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Нефтяные и газовые пласты связаны с окружающими породами не только механически, но и термодинамически. Выше было показано, что любое механическое воздействие на горные породы, произведенное на каком-либо их участке, вызывает механические изменения в окружающих породах. Изменение температуры, происшедшее однажды в каком-либо месте пласта, распространяется по породам и их содержимому.

Изучение энергетического баланса нефтяного пласта было начато, по-видимому, Б. Б. Лапуком [125]. Им было показано, что при разработке нефтяных пластов на обычных режимах, не связанных со значительным вводом в них тепла, фильтрация жидкостей и газов в пластах является изотермическим процессом. Общее уравнение сохранения энергии в пласте было получено Э. Б. Чекалюком [120], выявившим условия, когда в процессе фильтрации жидкостей и газов, даже при отсутствии ввода в пласт тепла извне, температурные условия в пласте могут существенно изменяться. Уравнения сохранения энергии в пластах с учетом различных факторов были получены И. А. Чарным [119] и М. Д. Розенбергом и др. [115]. Значительная часть работ, выполненных в области температурного режима нефтяных пластов, связана главным образом с тепловыми методами воздействия на пласты. Начиная с первых исследований А. Б. Шейнмана и К. К. Дубровай [123], посвященных методу внутрипластового горения, целый ряд работ по изучению температурного поля в пластах и неизотермической фильтрации выполнен А. А. Аббасовым [3], Н. А. Авдониным и Л. И. Рубинштейном [5], М. А. Багировым [8], Г. Е. Малофеевым [72], М. Я. Антимировым [7], Н. Н. Непримеровым, М. А. Пудовкиным и А. И. Марковым [82], Ловерье [143], Марксом и Лангенгеймом [144], Рэми [148], Е. В. Теслюком, М. Д. Розенбергом и др. [84] и др.

Технология и техника теплового воздействия на пласты освещены в книге Н. К. Байбакова, В. А. Брагина, А. Р. Гарушева и И. В. Толстого [107], К. А. Оганова [87], А. Б. Шейнмана, Г. Е. Малофеева и А. И. Сергеева [124] и др.

При изучении энергетического состояния пластов в общем случае необходимо учитывать изменение в пластах полной энергии, включающей внутреннюю энергию пород и насыщающих пласты

веществ, производимую веществами работу, подвод и отвод тепла, потенциальную энергию положения и кинетическую энергию.

Ввиду сравнительно малой скорости фильтрационных движений в пластах кинетической энергией жидкостей и газов обычно можно пренебрегать. Для простоты будем также рассматривать горизонтальные пласты, без учета изменения потенциальной энергии положения.

При математическом описании сохранения энергии в пласте удобнее рассматривать изменение энергии не единицы массы вещества, а изменение энергии, заключенной в фиксированном элементарном объеме пласта. Для этого в соответствии с первым началом термодинамики необходимо определить изменение внутренней энергии $dU$ в элементарном объеме пласта, баланс работы $pdV$, произведенной веществом при его расширении в элементарном объеме пласта, а также изменение количества тепла $\delta Q$, вошедшего в элемент пласта или вышедшего из него.

Внутренняя энергия поступает в элемент пласта либо вместе с движущимся в пласте веществом, либо в результате теплопроводности, происходящей в веществе и в породах-коллекторах. Элементарная работа $pd(1/\rho)$ производится движущимся в пласте веществом (здесь $\rho$ — плотность вещества).

Под величиной $\delta Q$ будем понимать количество тепла, поступающего в элементарный объем пласта как извне, например из окружающих пласт пород, так и в результате гидравлического трения движущихся в пласте веществ. Величина $\delta Q$ не является полным дифференциалом, она зависит от условий передачи тепла от пород к элементарному объему пласта и наоборот.

На основе первого начала термодинамики для элементарного объема пласта можно написать

$$\delta Q = dU + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = dU - \frac{p}{\rho^2}\,d\rho. \tag{2.1}$$

В соответствии с представлениями термодинамики необратимых процессов [35] следует ввести понятие потока внутренней энергии, а также использовать обычное для механики сплошных сред понятие потока вещества.

В общем виде следует полагать, что внутренняя энергия движущегося в пласте вещества зависит как от температуры, так и от его удельного объема или плотности, так что

$$U = U\left(T,\ \frac{1}{\rho}\right). \tag{2.2}$$

Внутренняя энергия и плотность вещества изменяются во времени и в пространстве. Поэтому можно написать следующие выражения для полных производных внутренней энергии и плотности движущегося вещества по времени $t$:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div}(U\vec{v}_e); \tag{2.3}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}). \tag{2.4}$$

В выражениях (2.3) и (2.4) $\vec{v}_e$ представляет собой осредненную по пласту скорость переноса внутренней энергии, а $\vec{v}$ — скорость переноса вещества в пласте. Здесь рассматривается вещество в целом, без разделения его на фазы и компоненты. Если появляется необходимость учета скоростей фаз и компонентов вещества, следует вводить понятия скоростей фаз, учитывать диффузию компонентов, обмен между фазами и т. д.

После внесения (2.3) и (2.4) в (2.1) получаем для изменения во времени количества тепла в элементарном объеме следующее выражение:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div}(U\vec{v}_e) - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v}\right). \tag{2.5}$$

Входящую в (2.5) внутреннюю энергию $U$ следует выразить через температуру и удельный объем (плотность). Для этого в соответствии с (2.2) можно написать

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = c_V\, dT + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T d\rho. \tag{2.6}$$

Для полной производной температуры по времени имеем следующее выражение:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}_e T). \tag{2.7}$$

Как уже было сказано выше, перенос внутренней энергии осуществляется как путем конвекции, т. е. вместе с движущимся веществом, так и за счет теплопроводности. Можно ввести следующее предположение:

$$\vec{v}_e = \vec{v}_\Theta + \vec{v}, \tag{2.8}$$

где $\vec{v}_\Theta$ — скорость переноса энергии за счет теплопроводности.

Из (2.1), (2.4), (2.6) и (2.7) получаем

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} T\vec{v}_\Theta + \operatorname{div} T\vec{v}\right) + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T - \frac{p}{\rho^2}\right] \times$$
$$\times\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v}\right). \tag{2.9}$$

Входящая в (2.9) величина $(dU/d\rho)_T$ характеризует изменение внутренней энергии с изменением удельного объема вещества. Эту величину можно выразить через другие термодинамические величины, используя формулу

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -\rho^2\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T = \frac{c_p - c_V}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p} - p. \tag{2.10}$$

Для идеальных газов $(dU/dV)_T = 0$, в чем легко убедиться, используя уравнение состояния идеального газа $pV = RT$ и помня, что

для идеального газа $c_p - c_V = R$. Для реальных газов величина $(dU/dV)_T$ отлична от нуля.

Для того чтобы превратить выведенное выше соотношение (2.9) в уравнение сохранения энергии пласта, необходимо учесть в нем специальные закономерности передачи тепла в нефтегазоносных пластах и приравнять нулю полное изменение энергии в элементарном объеме пласта.

Пласт представляет собой гетерогенную среду. Породы-коллекторы и насыщающие их вещества обладают различными термодинамическими свойствами. Вещества, насыщающие поры пород, могут двигаться, породы же можно считать неподвижными. В принципе температура пород пласта и их содержимого может быть различной. Если породы-коллекторы представляют собой пористую среду, то теплообмен между материалом пористой среды и насыщающими пласт веществами происходит довольно быстро, так что температуру зерен пористой среды можно считать равной температуре насыщающих пласт веществ.

Важное значение имеют условия передачи тепла к элементу пласта. Кровля и подошва пласта обладают теплопроводностью, в результате чего изменение температуры пласта по сравнению с температурой окружающих пласт пород приводит к возникновению потоков тепла через кровлю и подошву. Если неизотермический процесс рассматривать как пространственный процесс, то подвод или отвод тепла к пласту в целом следует учитывать соответствующими условиями на его границе. В этом случае, если, конечно, в пласте отсутствуют химические реакции с выделением или поглощением тепла, в элементарный объем пласта входит тепло как поток внутренней энергии, т. е. за счет конвекции и теплопроводности, и скорость подвода тепла к элементарному объему пласта, учитываемая величиной $\delta Q/\delta t$, равна лишь скорости выделения тепла из потока за счет гидравлического трения, так что $\delta Q/\delta t = dN/dV$ ($N$ — гидравлическая мощность внутрипластового потока). Однако часто используют представление о плоском пласте. Тогда

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{dN}{dV} + q_{\text{к. п}}, \tag{2.11}$$

где $q_{\text{к. п}}$ — величина, учитывающая поток тепла по кровле и подошве с «элементарного объема» пласта мощностью $h$.

Температура в самом пласте считается в данном случае одинаковой по всей мощности пласта.

Формула (2.11) является уравнением сохранения энергии в плоском пласте, если в нее подставить $\frac{\delta Q}{\delta t}$ из (2.9).

При использовании выражений для потока тепла через кровлю — подошву часто, в свою очередь, принимаются дополнительные упрощения. Наиболее известное упрощение состоит в том, что поток тепла с каждого элемента поверхности кровли и подошвы пласта считают происходящим только в вертикальном направлении. При этом

используют два подхода к описанию потока тепла через кровлю — подошву. Один из них основан на предположении о квазистационарности теплопроводностного потока, что приводит к следующей формуле:

$$q_{к.\ п} = a(T - T_0), \tag{2.12}$$

где $T$ — температура пласта; $T_0$ — начальная температура окружающих пласт пород; $a$ — коэффициент, зависящий от термических свойств пород.

При использовании второго подхода поток тепла в кровлю — подошву считают нестационарным, происходящим только в вертикальном направлении. В соответствии с теорией теплопроводности в этом случае имеем

$$q_{к.\ п} = \frac{\lambda_{к.\ п}\varkappa_{к.\ п}}{h\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{[T(x,\ y,\ \tau) - T_0]\, d\tau}{[\varkappa_{к.\ п}(t-\tau)]^{3/2}}, \tag{2.13}$$

где $\lambda_{к.\ п}$ и $\varkappa_{к.\ п}$ — соответственно коэффициенты теплопроводности и температуропроводности пород кровли и подошвы пласта.

Особый случай представляет неизотермическое течение, когда возникают химические реакции между движущимися веществами или веществами и породой. Тогда необходимо в уравнение сохранения энергии добавлять члены, учитывающие выделение тепла в рассматриваемом элементе пласта.

Рассмотрим теперь более подробно вопрос о тепле, выделяющемся в пласте в результате гидравлического трения. Скорость выделения этого тепла пропорциональна элементарной гидравлической мощности $\Delta N$, затрачиваемой на трение в элементарном объеме пород $\Delta V$. Имеем

$$\Delta N = v_x \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z + v_y \frac{\partial p}{\partial y}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z + v_z \frac{\partial p}{\partial z}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z, \tag{2.14}$$

где $v_x$, $v_y$, $v_z$ — компоненты скорости фильтрации $\vec{v}$.

Разделив (2.14) на $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ и перейдя к пределу, получим

$$n = \frac{\Delta N}{\Delta V}_{\Delta V \to 0} = v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} = \vec{v} \cdot \operatorname{grad} p. \tag{2.15}$$

Суммарная мощность, расходуемая на гидравлическое трение потоком движущихся в породах веществ в пласте объемом $V$, определяется следующим образом:

$$N = \iiint_V \vec{v} \cdot \operatorname{grad} p\, dV. \tag{2.16}$$

В случае фильтрации однородной жидкости по закону Дарси

$$N = -\frac{\mu}{k} \iiint_V \vec{v} \cdot \vec{v}\, dV = -\frac{\mu}{k} \iiint_V v^2\, dV. \tag{2.17}$$

В качестве примера рассмотрим фильтрацию однородной жидкости в прямолинейном образце пористой среды длиной $l$, высотой $h$ и шириной $b$.

Имеем

$$N = \frac{\mu}{k} \int\limits_V \int\int v^2 \, dV = \frac{\mu q^2 l^2}{kV}, \quad V = lbh, \tag{2.18}$$

где $q$ — расход жидкости.

Вместе с тем затрачиваемая на фильтрацию мощность определяется по внешним характеристикам следующим образом:

$$N = q \, \Delta p = \frac{\mu q^2 l^2}{kV}. \tag{2.19}$$

Выражения для мощности (2.18) и (2.19) совпадают, как и следовало ожидать.

Определим средневзвешенную по пмасту величину $\overline{v^2}$ по следующей формуле:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{V} \int\limits_V \int\int v^2 \, dV. \tag{2.20}$$

Отсюда, учитывая (2.17), получаем

$$\overline{v^2} = \frac{kN}{\mu V}. \tag{2.21}$$

Произведем теперь оценку величины мощности гидравлического трения. В соответствии с формулой (2.21) для мощности гидравлического трения, отнесенной к единице объема пласта, имеем

$$\frac{\Delta N}{\Delta V} = \frac{\overline{v^2} \mu}{k}. \tag{2.22}$$

Примем среднюю скорость фильтрации равной 100 м/год $\approx$ $\approx 3{,}18 \cdot 10^{-4}$ см/с, $\mu = 1$ сПз $\approx 10^{-8}$ кгс·с/см$^2$, $k = 100$ мД $= 10^{-9}$ см$^2$. По формуле (2.22) получаем

$$\frac{\Delta N}{\Delta V} = \frac{3{,}18^2 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-8}}{10^{-9}} \approx 10^{-6} \frac{\text{кгс} \cdot \text{см}}{\text{с} \cdot \text{см}^3} = 10^{-8} \frac{\text{ккал}}{\text{с} \cdot \text{см}^3} =$$

$$= 2{,}35 \cdot 10^{-11} \frac{\text{ккал}}{\text{с} \cdot \text{см}^3} \approx 2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{ккал}}{\text{сут} \cdot \text{см}^3} = 2 \frac{\text{ккал}}{\text{сут} \cdot \text{м}^3}.$$

Это, конечно, малая величина, и поэтому при рассмотрении энергии обычно не учитывают гидравлическое трение, особенно если изучаемые процессы связаны со значительными изменениями температуры в пласте.

Заметим еще раз, что необходимость использования уравнения сохранения энергии возникает только при изучении процессов, вызывающих существенные изменения термодинамической обстановки в пластах. При изучении же изотермических процессов, хотя они

и сопровождаются теплообменом между породами и насыщающими их веществами, бывает достаточным использовать только уравнение сохранения массы вещества.

## § 3. ЯВЛЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Закон передачи тепла в телах за счет теплопроводности — закон Фурье — выражается следующим образом:

$$v_\Theta = -k_т \operatorname{grad} T, \tag{3.1}$$

где $v_\Theta$ — скорость передачи тепла; $k_т$ — коэффициент теплопроводности.

Количество тепла $q$, передающегося в единицу времени по образцу горной породы, имеющему форму параллелепипеда площадью поперечного сечения $S = 1$ см$^2$ и длиной $l = 1$ м, при разности температур на его концах $\Delta T = 100°$ С, можно определить в соответствии с законом (3.1) по формуле

$$q = \frac{k_т S \Delta T}{l}. \tag{3.2}$$

Для горных пород коэффициент теплопроводности $k_т = 2$ ккал/м·ч·°С. Тогда $q = (2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2)/1 = 2 \cdot 10^{-2}$ ккал/ч.

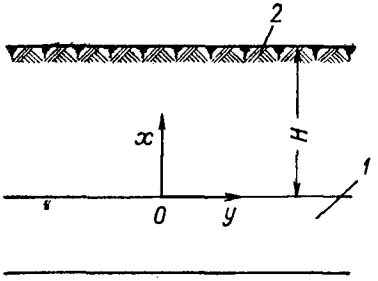



Рис. 96. Расположение пласта под дневной поверхностью:

*1* — пласт; *2* — дневная поверхность

Температура горных пород, залегающих в земной коре, возрастает с глубиной. Отношение изменения температуры к изменению глубины называют геотермическим градиентом. В науке о Земле в настоящее время существуют различные представления о причинах существования глубинного тепла. Наиболее известными причинами образования тепла в глубине Земли являются распад урана и других радиоактивных элементов и глубинные экзотермические реакции.

Описание явлений геотермии можно найти в многочисленных литературных источниках. Геотермический градиент различен в различных геологических областях. При этом довольно часто встречаются области, в которых геотермический градиент намного выше его среднего значения в других областях. Некоторые районы характеризуются настолько большим содержанием глубинного тепла, что оказывается целесообразным его промышленное использование.

Изучение распределения температуры в земной коре имеет большое значение для поисков и разведки полезных ископаемых, а также для осуществления их разработки. Используя среднее значение геотермического градиента, можно оценить величину общего тепло-

вого потока, поступающего из глубин Земли. Пусть геотермический градиент в среднем на Земле составляет 30° С на 1000 м, $k_т = 2$ ккал/м·ч·°С. Тогда по формуле (3.2) можно оценить величину потока тепла, поступающего с 1 м² земной поверхности:

$$q = \frac{2 \cdot 30}{1000} = 0{,}06 \ \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{ч}}.$$

С 1 га поступает 600 ккал в час, а с одного квадратного километра поверхности Земли $6 \cdot 10^4$ ккал/ч.

Перейдем теперь к рассмотрению нестационарных процессов теплопроводности.

Пусть в пласте под дневной поверхностью в некоторый момент времени была повышена температура (рис. 96). На дневной поверхности имеется постоянная температура, равная $T_0$, а в пласте, находящемся на глубине $H$ от дневной поверхности, температура в моменты времени $t \geqslant 0$ поддерживается равной $T_1$. В начальный момент времени $t = 0$ температура в интервале $0 \leqslant x \leqslant H$ была равна $T_0$ (на этот раз пренебрегаем геотермическим градиентом).

Распределение температуры в породах, находящихся над пластом в интервале $0 \leqslant x \leqslant H$, определяется решением уравнения теплопроводности

$$\varkappa \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \varkappa = \frac{k_т}{c}, \tag{3.3}$$

где $c$ — теплоемкость в ккал/м³·°С.

Это решение имеет следующий вид:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\frac{x}{H} + \frac{8(T_1 - T_0)}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4} \frac{\varkappa t}{H^2}\right] \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{x}{H}, \tag{3.4}$$

$$n = 0, 1, 2 \ldots$$

Из (3.4) следует, что распределение температуры будет близко к установившемуся при значении $\varkappa t / H^2 \approx 2$. Примем глубину залегания пласта $H = 100$ м, $\varkappa = 5 \cdot 10^{-3}$ м²/ч. Тогда время, которое должно пройти до установления стационарного распределения температуры, будет

$$t = \frac{2H^2}{\varkappa} = \frac{2 \cdot 10^4}{0{,}5 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^7 \text{ ч} \approx 4600 \text{ лет}.$$

Таким образом, из этого расчета видно, что процессы теплопроводности протекают очень медленно. Поэтому для практически обозримых промежутков времени можно во многих случаях считать, что уход тепла из пласта за счет теплопроводности происходит так, как бы он происходил в среде, занимающей неограниченное пространство.

Рассмотрим теперь следующий процесс. Пусть на границе $x = 0$ прямолинейного полубесконечного пласта в момент времени $t = 0$ температура мгновенно установилась на уровне $T_1$, причем до этого температура во всем пласте была равной $T_0$. Распределение температуры в пласте описывается уравнением теплопроводности, так что в любой момент времени при $t \geqslant 0$ имеем

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^{\frac{x}{2(\varkappa t)^{1/2}}} \exp(-\xi^2)\, d\xi. \tag{3.5}$$

Для потока тепла $q$ на границе $x = 0$ имеем следующее выражение:

$$q = k_T S \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = k_T S \frac{T_1 - T_0}{(\pi \varkappa t)^{1/2}}. \tag{3.6}$$

Допустим теперь, что в момент времени $t = \tau$ температура на границе пласта $x = 0$ вновь стала равной $T_0$. Это обстоятельство можно учесть прибавлением к решению (3.5) нового решения, справедливого при $t \geqslant \tau$, описывающего распределение в пласте температуры $\Theta$:

$$\frac{\Theta}{T_0 - T_1} = 1 - \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^{\frac{x}{2[\varkappa(t-\tau)]^{1/2}}} \exp(-\xi^2)\, d\xi. \tag{3.7}$$

Отсюда для потока тепла $q_\Theta$ получим формулу

$$q_\Theta = k_T S \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)_{x=0} = -k_T S \frac{T_1 - T_0}{[\pi(t-\tau)\varkappa]^{1/2}}. \tag{3.8}$$

Суммарное количество тепла, ушедшего в пласт за отрезок времени, равный $\tau$, определяется интегралом

$$\int_0^t q\, dt = \frac{2k_T S}{\pi \varkappa} (T_1 - T_0)(\pi \varkappa \tau)^{1/2}, \tag{3.9}$$

а суммарное количество тепла, «вернувшегося» из пласта к моменту времени $t$, равно

$$\int_\tau^t (q - q_\Theta)\, dt = \frac{2k_T S}{\pi \varkappa} (T_1 - T_0)[(\pi \varkappa t)^{1/2} - (\pi \varkappa \tau)^{1/2} - \pi^{1/2} \varkappa^{1/2} (t - \tau)^{1/2}]. \tag{3.10}$$

Тепло, вошедшее в пласт до момента времени $\tau$, возвращается из пласта, когда $t \gg \tau$. Интересно определить отношение количества тепла, возвратившегося из пласта за отрезок времени $t = 2\tau$, к введенному в пласт теплу за отрезок времени $t = \tau$. Для этого

нужно взять $t = 2\tau$ и составить отношение согласно (3.9) и (3.10):

$$\frac{\left|\int\limits_{\tau}^{2\tau}(q-q_0)\,dt\right|}{\left|\int\limits_{0}^{\tau} q\,dt\right|} = 2-\sqrt{2}\approx 0{,}6. \tag{3.11}$$

Следовательно, если в некоторый момент времени на границе пласта мгновенно повысить температуру до определенной величины и поддерживать эту температуру в течение некоторого времени, а затем также мгновенно на границе пласта понизить температуру до первоначальной величины, то за время, равное времени поддержания повышенной температуры на границе пласта, из пласта возвратится обратно около 60% ушедшего в пласт тепла. Конечно, если температуру на границе пласта повышать и понижать не мгновенно, картина утечки и возвращения тепла изменится во времени, однако в общих чертах останется такой же, что и в рассмотренном выше примере.

Рассмотрим теперь радиальный отток тепла из скважины в пласт. Будем считать, что начальная температура пласта равна $T_0$, а в моменты времени $t > 0$ отток тепла в пласт из скважины радиусом $r_c$ по мощности пласта $h$ является постоянным, т. е. $q = \text{const}$. Распределение температуры в пласте описывается уравнением теплопроводности (3.3), имеющем в данном случае следующий вид:

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{3.12}$$

Обозначая $\tau = \dfrac{\varkappa t}{r_c^2}$, $\rho = \dfrac{r}{r_c}$, $\varphi = 2\pi h k_\tau\,(T-T_0)/q$, преобразуем уравнение (3.12) к виду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}. \tag{3.13}$$

На стенке скважины, в соответствии со сказанным выше, имеем условия

$$q=-2\pi k_\tau h\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_{\rho=1},\quad \left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_{\rho=1}=-1. \tag{3.14}$$

Решение уравнения (3.13) при граничном условии (3.14) и начальном условии $\varphi = 0$ при $\tau = 0$ выражается в виде интеграла [136]

$$\varphi(\rho,\ \tau)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{[1-\exp(-u^2\tau)]\,[J_1(u)\,Y_0(u\rho)-Y_1(u)\,J_0(u\rho)]\,du}{u^2\,[J_1^2(u)+Y_1^2(u)]}, \tag{3.15}$$

где $J_0(u)$, $J_1(u)$, $Y_0(u)$, $Y_1(u)$ — функции Бесселя.

На рис. 97 представлена зависимость $\varphi$ $(1, \tau)$ от $\lg\tau$ в диапазоне изменения $\tau$ от $10^{-2}$ до $10^3$.

Рассчитаем в качестве примера следующий случай радиального прогрева пласта из скважины. Пусть радиус скважины $r_c = 10$ см, $\varkappa = 5 \cdot 10^{-3}$ см$^2$/с, мощность пласта $h = 10$ м $= 10^3$ см, $k_c = 0{,}56 \cdot 10^{-5}$ ккал/с·см·°С, $q = 100$ кВт $= 24$ ккал/с. Тогда по предыдущему имеем $\tau = \varkappa t/r_c^2 = 5 \cdot 10^{-5} t$, $T - T_0 = 6{,}8 \cdot 10^2 \varphi$.

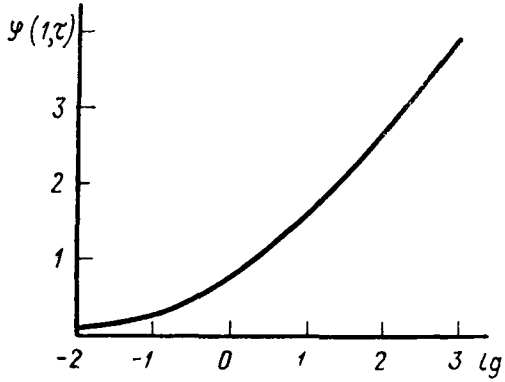


Рис. 97. Зависимость $\varphi(1, \tau)$ от $\lg \tau$

Из рис. 97 получаем, что для $t = 10^4$ с $\approx 2$ ч 45 мин $\tau = 5 \cdot 10^{-1}$ и $\varphi = 0{,}6$. Отсюда $T - T = 6{,}8 \cdot 10^2 \cdot 0{,}6 = 410°$ С.

Уравнение распространения тепла в сплошной среде (3.3) при центральной симметрии принимает следующий вид:

$$\varkappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}. \qquad (3.16)$$

В качестве примера рассмотрим распределение тепла от сферической полости радиусом $r_0$ в неограниченном пространстве. Этот случай, например, может с некоторым приближением соответствовать распространению тепла в горных породах при подземном ядерном взрыве.

Допустим, что в момент времени $t = 0$ в горных породах создана сферическая полость в результате ядерного взрыва, при котором выделилось $N$ ккал тепла. В последующие моменты времени при $t > 0$ тепло от полости распространяется в горных породах за счет теплопроводности. При этом теплоемкость газов, заполняющих полость, равна $c_0$, а теплоемкость окружающих пород равна $c$. Решение описанной выше задачи получим приближенным методом для чего примем, что распределение температуры

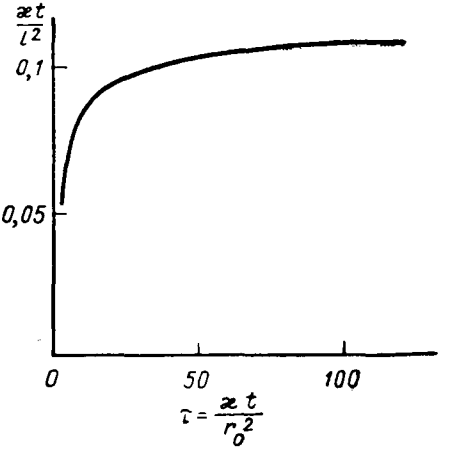


Рис. 98. Зависимость $\varkappa t/l^2$ от $\tau = \varkappa t/r_0^2$

в зоне $r_0 \leqslant r \leqslant l(t)$ представляется следующим образом:

$$T(r, t) = T_0(t) \frac{1 - \frac{r^3}{l^3(t)}}{1 - \frac{r_0^3}{l^3(t)}}, \tag{3.17}$$

где $T_0(t)$ — температура в полости.

При $r \geqslant l(t)$ $T = 0$. Поскольку общее количество тепла, выделившегося при взрыве, постоянно и равно $N$, нетрудно составить следующее условие баланса тепла:

$$\frac{4}{3}\pi r_0^3 c_0 T_0 + 4\pi c \int_{r_0}^{l(t)} T(r) r^2 \, dr = N. \tag{3.18}$$

Введя обозначения $\xi = \frac{r^3}{l^3(t)}$, $\xi_0 = \frac{r_0^3}{l^3(t)}$, получаем из (3.18)

$$T_0 \xi_0 + \frac{c}{c_0} \int_{\xi_0}^{1} T(\xi) \, d\xi = \frac{3N}{4\pi c_0 l^3(t)}. \tag{3.19}$$

Из (3.17) и (3.19) получаем следующее выражение:

$$T_0 = \frac{3N}{4\pi c_0 \left[ r_0^3 + \frac{c}{2c_0} (l^3 - r_0^3) \right]}. \tag{3.20}$$

Не приводя здесь полного решения поставленной выше задачи, отметим, что это решение дает зависимость величины $\varkappa t/l^2$ от безразмерного времени $\tau = \varkappa t/r_0^2$. Эта зависимость при $c/c_0 = 1$ представлена на рис. 98. Определив $l(t)$ по графику рис. 98, можно по формуле (3.20) вычислить $T_0$ и распределение температуры в горных породах по формуле (3.17). При $r_0 = 0$, т. е. при распространении тепла в результате «точечного» подземного взрыва, для величин $l(t)$ и $T_0$ получаются следующие простые выражения:

$$l(t) = (8\varkappa t)^{1/2}, \tag{3.21}$$

$$T_0 = \frac{3N}{2\pi c} \left( 8\varkappa t \right)^{-3/2}. \tag{3.22}$$

Сопоставим значения $\varkappa t/l^2$, полученные для конечного $r_0$ и для $r_0 = 0$. В первом случае из графика рис. 98 имеем при $\tau = 125$ $\varkappa t/l^2 = 0{,}111$, а из решения (3.21), справедливого при $\tau \to \infty$, имеем $\varkappa t/l^2 = 0{,}125$. Величины $\varkappa t/l^2$, близкие к 0,125, получаются при очень больших значениях $\tau$.

## § 4. ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ИЗ ПЛАСТОВ ГОРЯЧЕЙ ВОДОЙ И ПАРОМ

Процесс извлечения нефти из пластов при помощи обычного заводнения проходит довольно эффективно в условиях, когда вязкость нефти не превышает вязкости воды в 7 ÷ 10 раз.

При вытеснении же значительно более вязких нефтей водой, закачиваемой в пласт при температуре, существенно не превышающей пластовую температуру, нефтеотдача до момента обводнения нефтяных скважин получается низкой. В последующем приходится добывать вместе с нефтью слишком большое количество воды, что ведет к увеличению затрат на разработку месторождения и не приводит к получению необходимой нефтеотдачи.

Заводнение пластов, содержащих нефти повышенной вязкости (свыше 20—50 сПз), оказывается неэффективным еще и из-за того, что вода быстро проскальзывает по наиболее проницаемым слоям или трещинам, что также приводит к необходимости прокачки по пласту больших объемов воды, многократно превышающих объем извлекаемой нефти.

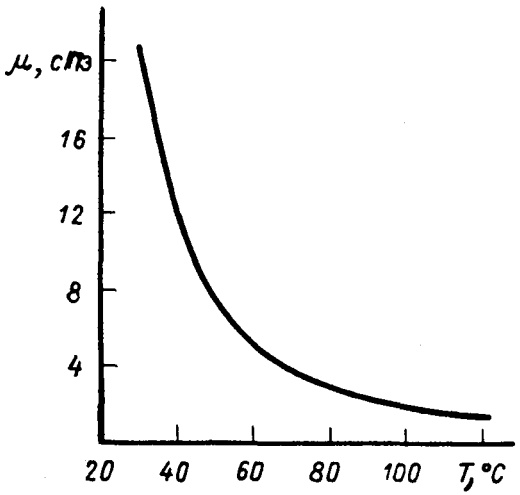


Рис. 99. Зависимость вязкости нефти μ от температуры $T$

Одним из наиболее эффективных способов разработки залежей нефтей повышенной вязкости является вытеснение их из пластов нагретой («горячей») водой, а также паром.

Вытеснение нефти из пластов горячей водой отличается от вытеснения нефти холодной водой в первую очередь тем, что при закачке в пласт горячей воды или пара в нагретой области пласта уменьшается отношение вязкости нефти к вязкости воды, что способствует улучшению условий извлечения нефти из пласта. При этом с ростом температуры уменьшается вязкость не только нефти, но и воды, однако вязкость нефти уменьшается значительнее, чем вязкость воды.

Кроме понижения отношения вязкости нефти к вязкости воды, при закачке в пласт горячей воды или пара расплавляются смолы и асфальтены, частично покрывающие поверхность пород-коллекторов, и, следовательно, происходит гидрофилизация пласта, приводящая к повышению активности капиллярных сил, увеличению скорости капиллярной пропитки и более полному извлечению нефти из линз и блоков пород.

При соответствующих свойствах нефти, пластовом давлении, температуре закачиваемых в пласт горячей воды или пара происходит дистилляция нефти, т. е. выделение из нее более легких фракций и перенос этих фракций в газообразном состоянии в направлении вытеснения. Выделяющиеся из нефти при дистилляции легкие фрак-

ции конденсируются перед нагретой зоной, смешиваются с пластовой нефтью, разжижая ее.

Все описанные выше эффекты приводят к повышению нефтеотдачи пластов. Учет всего комплекса этих эффектов при теоретическом рассмотрении процессов вытеснения нефти из пластов горячей водой и паром довольно сложен. Поэтому рассмотрим процесс извлечения нефти из пласта горячей водой, принимая во внимание лишь эффект изменения от температуры соотношения вязкостей нефти и воды.

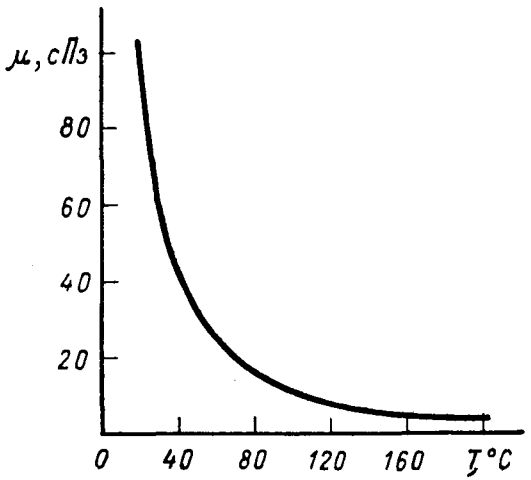



Рис. 100. Зависимость вязкости нефти μ от температуры $T$

В этом процессе, как и при других воздействиях на пласт теплом, оказываются взаимно связанными тепловые и гидродинамические явления. Теоретическое исследование рассматриваемого процесса осуществляется путем решения соответствующей термогидродинамической задачи. Эту задачу часто упрощают, разделяя ее на тепловую и гидродинамическую части. Так и будет сделано ниже.

Итак, пусть в прямолинейный пласт, первоначально насыщенный нефтью, закачивается нагретая вода с температурой, существенно превышающей пластовую температуру. Зависимость вязкости нефти от температуры определяется свойствами нефти. Возьмем зависимости вязкости нефти от температуры, представленные на рис. 99 и 100. Зависимость, показанная на рис. 99, характерна для нефти так называемой «средней» вязкости — при температуре 30° С ее вязкость составляет 20 сПз, а уже при температуре 100° С вязкость оказывается равной 2 сПз. На рис. 100 показана зависимость вязкости от температуры высоковязкой нефти.

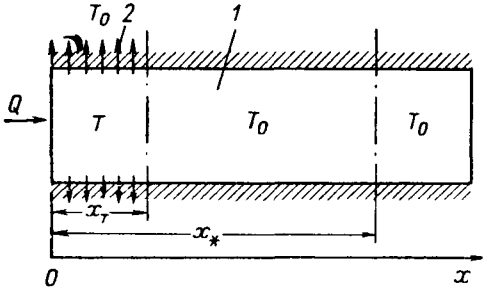



Рис. 101. Закачка в пласт теплоносителя:
*1* — пласт; *2* — тепло, уходящее в кровлю — подошву пласта

Для изучения вытеснения нефти из пласта нагретой водой вна-

чале рассмотрим тепловую задачу. Можно использовать различную схематизацию процесса распространения тепла. В данном случае примем очень удобную для упрощенных расчетов схематизацию, согласно которой будем пренебрегать теплопроводностью в самом пласте, а уход тепла в кровлю и подошву пласта будем считать происходящим только в вертикальном направлении и, кроме того, будем рассматривать процесс распространения тепла в пласте в целом.

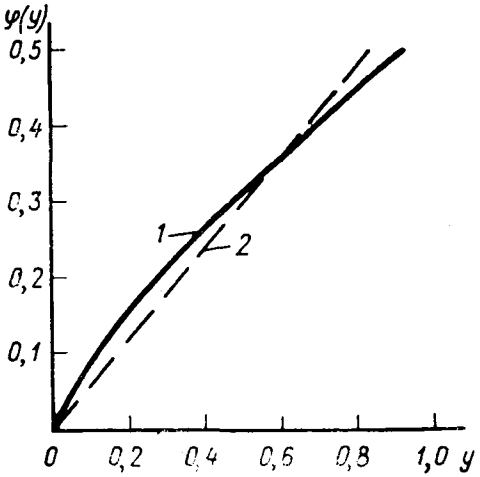



Рис. 102. Зависимость $\varphi(y) = \varphi$
*1* — кривая $\varphi(y)$; *2* — аппроксимация $\varphi(y)$

Согласно этой постановке задачи, температуру $T$ в самом пласте примем постоянной на участке от входа в пласт до фронта прогрева пласта $x_т$ (рис. 101). При $x > x_т$ температура также остается неизменной, равной начальной пластовой $T_0$, так что на участке $0 \leqslant x \leqslant x_т$ перепад температур $\Delta T = T - T_0 = \text{const}$. Из формулы (2.13) второго параграфа этой главы получаем при $\Delta T = \text{const}$

$$q_{к.\,п} = \frac{k_{к\cdot п}\varkappa_{к\cdot п}\Delta T}{h\pi^{1/2}}\int_0^t \frac{d\tau}{[\varkappa_{к\cdot п}(t-\tau)]^{3/2}} = -\frac{2k_{к.\,п}\Delta T}{h\pi^{1/2}}\frac{1}{\cdot(\varkappa_{к.\,п}t)^{1/2}}, \quad (4.1)$$

где $k_{к\cdot п}$, $\varkappa_{к\cdot п}$ — теплопроводность и температуропроводность кровли—подошвы пласта.

По мере продвижения фронта нагрева пласта $x_т$ растет площадь $S$, по которой происходит утечка тепла из самого пласта в его кровлю и подошву. К моменту времени $t$ темп ухода тепла из пласта в кровлю — подошву $q_{к\cdot п}$ будет выражаться интегралом

$$q_{к.\,п} = \int_0^t \frac{2k_{к.\,п}\Delta T\,dS}{[\pi\varkappa_{к.\,п}(t-\tau)]^{1/2}}. \quad (4.2)$$

Темп же поступления тепла в пласт определяется формулой

$$q_п = ah\,\Delta T\frac{dS}{dt}, \quad a = c_т\rho_т(1-m) + c_в\rho_в m, \quad (4.3)$$

где $c_т$, $\rho_т$ — теплоемкость и плотность пород; $c_в$, $\rho_в$ — теплоемкость и плотность жидкости; $m$ — пористость.

Обозначая символом $q$ общий темп ввода в пласт тепла, получаем на основе баланса тепла следующее соотношение:

$$\int_0^t \frac{2k_{\text{к. п}}\,\Delta T\,\frac{dS}{d\tau}\,d\tau}{[\pi\varkappa_{\text{к. п}}(t-\tau)]^{1/2}} + ah\,\Delta T\,\frac{dS}{dt} = q. \tag{4.4}$$

Обозначая $\frac{dS}{dt} = f(t)$, получаем

$$\int_0^t \frac{2\,k_{\text{к. п}}\,\Delta T f(\tau)\,d\tau}{[\pi\varkappa_{\text{к. п}}(t-\tau)]^{1/2}} + ah\,\Delta T f(t) = q. \tag{4.5}$$

Если считать заданным $q = q(t)$, а неизвестным является $f(t)$, то (4.5) будет представлять собой интегральное уравнение. Если же принять, что $f(t)$ — заданная функция, то $q(t)$ можно определить из (4.5) после вычисления интеграла.

Описанная выше схема распространения тепла в пласте при закачке в него теплоносителя известна в литературе как схема Маркса — Лангенгейма [144].

В случае $q = \text{const}$ решение интегрального уравнения (4.5) имеет следующий вид:

$$S = \frac{ah\varkappa_{\text{к. п}}q}{2k^2_{\text{к. п}}\Delta T}\varphi(y);$$

$$\varphi(y) = \left[\exp(y)\operatorname{erfc}(y)^{1/2} + 2\left(\frac{y}{\pi}\right)^{1/2} - 1\right];\quad y = \frac{2k^2_{\text{к. п}}t}{a^2h^2\varkappa_{\text{к. п}}}. \tag{4.6}$$

На рис. 102 представлена зависимость $\varphi(y)$.

Темп ввода в пласт тепла $q$ при постоянной температуре пропорционален расходу теплоносителя $q_{\text{в}}$, так что

$$q = c_{\text{в}}\rho_{\text{в}}\,\Delta T q_{\text{в}}. \tag{4.7}$$

Для прямолинейного пласта $q_{\text{в}} = vbh$ ($v$ — скорость фильтрации, $b$ — ширина пласта) и, соответственно, $S = bx_{\text{т}}$. Тогда из (4.6) получается, что

$$x_{\text{т}} = \frac{ac_{\text{в}}\rho_{\text{в}}\varkappa_{\text{к. п}}h^2}{2k^2_{\text{к. п}}}v\varphi(y)\cdot \tag{4.8}$$

Как видно из рис. 102, зависимость $\varphi(y)$ на участке $0 \leqslant y \leqslant 0{,}8$ можно приближенно представить в виде линейной зависимости. Поэтому на основе (4.8) можно написать

$$x_{\text{т}} \approx 0{,}625\,\frac{c_{\text{в}}\rho_{\text{в}}}{c_{\text{т}}\rho_{\text{т}}(1-m) + c_{\text{в}}\rho_{\text{в}}m}vt. \tag{4.9}$$

При $c_{\text{в}}\rho_{\text{в}} = 1$ ккал/м³·°С, $c_{\text{т}}\rho_{\text{т}} = 0{,}7$ ккал/м³·°С; $m = 0{,}2$ из (4.9) получаем

$$\frac{dx_{\text{т}}}{dt} = 0{,}82v. \tag{4.10}$$

Таким образом, в данном случае скорость движения теплового фронта составляет 0,82 от скорости фильтрации. Скорость движения фронта вытеснения, конечно, значительно превышает скорость движения теплового фронта. Для того чтобы узнать скорость движения фронта вытеснения нефти водой, необходимо рассмотреть сам процесс вытеснения нефти водой.

В соответствии с теорией совместной фильтрации нефти и воды, изложенной в третьей главе, и с учетом изменения вязкости нефти в зоне нагрева при $0 \leqslant x \leqslant x_т$ следует ввести две функции Леверетта $F(s)$: в области $0 \leqslant x \leqslant x_т$

$$F_т(s) = \frac{k_в}{k_в + \mu_0^т k_н} \tag{4.11}$$

и в области $x \geqslant x_т$

$$F(s) = \frac{k_в}{k_в + \mu_0 k_н}, \tag{4.12}$$

где $\mu_0^т$ и $\mu_0$ — отношения вязкости воды к вязкости нефти в соответствующих областях; $s$ — водонасыщенность.

Безразмерная координата $\xi$ в области $0 \leqslant x \leqslant x_т$ определяется следующим образом:

$$\xi = \frac{mx}{vt} = F_в'(s). \tag{4.13}$$

Отсюда, учитывая (4.9), имеем

$$\xi_т = \frac{mx_т}{vt} = \frac{0{,}625 c_в \rho_в m}{c_т \rho_т (1-m) + c_в \rho_в m} = F_в'(s_т), \tag{4.14}$$

где $s_т$ — насыщенность на тепловом фронте.

Соотношение (4.14) позволяет определить величину водонасыщенности на фронте нагрева $x = x_т$. В области $x \geqslant x_т$ имеем

$$\xi = F^в(s). \tag{4.15}$$

Для того чтобы определить водонасыщенность на фронте вытеснения нефти водой, движущейся впереди фронта нагрева и имеющей пластовую температуру, т. е. при $x = x_*$, необходимо рассмотреть баланс закачанной в пласт воды, на основе которого можно написать

$$\int_0^{\xi_т} s(\xi)\, d\xi + \int_{\xi_т}^{\xi_*} s(\xi)\, d\xi = 1 \tag{4.16}$$

или, пользуясь формулами (4.13) и (4.15),

$$\int_1^{s_т} sF_т''(s)\, ds + \int_{s_в}^{s_*} sF''(s)\, ds = 1. \tag{4.17}$$

При $F_т(1) = 1$ и $F'_т(1) = 0$ первый интеграл (4.17) выражается следующим образом:

$$\int_1^{s_т} sF''_т(s)\,ds = s_т F'_т(s_т) - F_т(s_т) + 1. \qquad (4.18)$$

Если взять по частям второй интеграл (4.17), то, учитывая выражение (4.18), получим соотношение для определения $s_*$, помня, что $s_т$ определяется из (4.14):

$$F(s_*) - s_* F'(s_*) = s_т\,[F'_т(s_т) - F'(s_т)] - F_т(s_т) + F(s_т). \qquad (4.19)$$

Из соотношения (4.19) при $F_т(s) = F(s)$ получается соотношение Бакли — Леверетта для определения водонасыщенности на фронте вытеснения. Правая часть соотношения (4.19) зависит только от $s_т$, и поэтому обозначим ее $\Psi(s_т)$. Тогда для определения водонасыщенности на фронте вытеснения $s_*$ получим следующую формулу

$$s_* = \frac{F(s_*) - \Psi(s_т)}{F'(s_*)}. \qquad (4.20)$$

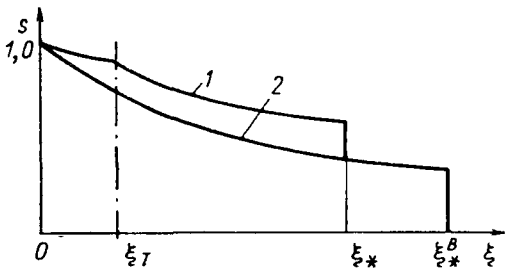



Рис. 103. Распределение водонасыщенности в пласте при вытеснении из него нефти горячей и холодной водой:

*1* — при вытеснении нефти горячей водой; *2* — при вытеснении нефти холодной водой

Распределение водонасыщенности при вытеснении нефти горячей и холодной водой показано на рис. 103, из которого видно, что остаточная нефтенасыщенность в области пласта, охваченной процессом вытеснения, меньше при вытеснении нефти горячей водой, чем при вытеснении ее холодной водой. Соответственно, в случае вытеснения нефти холодной водой $\xi^в_* > \xi_*$, т. е. фронт вытеснения продвигается на большее расстояние в пласте, чем при вытеснении нефти горячей водой, и, следовательно, закачиваемая в пласт холодная вода быстрее прорывается к эксплуатационным скважинам.

## § 5. МЕХАНИЗМ ИЗВЛЕЧЕНИЯ НЕФТИ ИЗ НЕДР ПРИ ПОМОЩИ ВНУТРИПЛАСТОВОГО ГОРЕНИЯ

Тепловое воздействие на нефтяной пласт может быть осуществлено не только путем закачки в него нагретого агента-теплоносителя, но и путем генерирования тепла в самом пласте, например за счет осуществления внутрипластового горения. Методы извлечения из недр полезных ископаемых при помощи подземного горения берут свое начало от идеи подземной газификации углей, выдвинутой в 1888 г. великим русским химиком Д. И. Менделеевым.

Промышленные эксперименты внутрипластового горения в СССР применительно к добыче нефти начали осуществляться в 30-х годах текущего столетия А. Б. Шейнманом и К. К. Дубровай [123], назвавшими этот метод воздействия на нефтяной пласт «подземной газификацией нефти». В настоящее время в различных странах имеется определенный опыт применения внутрипластового горения в реальных пластах.

Прежде чем перейти к изложению механизма извлечения нефти из пластов с использованием внутрипластового горения, опишем кратко его технологию. Для осуществления подземного горения в нефтенасыщенном пласте через скважины в пласт начинают нагнетать окислитель (обычно воздух). Нефть при этом частично вытесняется из пласта воздухом, однако воздух из-за его большей подвижности перемещается по пласту быстрее нефти и вскоре достигает эксплуатационных скважин. Таким образом, происходит соединение («сбойка») нагнетательных и эксплуатационных скважин. Одновременно с закачкой воздуха подогревают пласт вблизи забоя нагнетательной скважины каким-либо способом (при помощи электронагревателей, горелок, химическими методами и др.). Температура в скважине и на входе в пласт повышается, из-за чего возрастает интенсивность реакции окисления нефти. Одновременно под действием температуры происходит выделение из нефти легких фракций и перенос их внутрь пласта в направлении движения воздуха. В результате этого вблизи скважины остается коксоподобный остаток нефти (кокс). Температура в скважине в результате подогрева и усиления реакции окисления нефти возрастает настолько, что начинается бурное окисление кокса, т. е. его горение.

Из-за теплопроводности и конвекции зона повышенной температуры перемещается внутрь пласта. После выгорания кокса вблизи скважины начинается его горение в более удаленной зоне. Таким образом, зона горения постепенно перемещается в глубь пласта.

Выше было описано так называемое прямоточное горение. Известно также противоточное горение, когда зона горения движется от эксплуатационных скважин к нагнетательным, навстречу потоку окислителя. Метод внутрипластового горения, осуществляемый путем закачки в пласт только газообразного окислителя, получил в последнее время название «сухого» горения в отличие от «влажного» горения, при котором в пласт вместе с окислителем закачивается вода.

Согласно многочисленным экспериментальным данным [124, 132, 142], распределение температурных зон и насыщенностей пористой среды флюидами в процессе сухого или обычного внутрипластового горения в однородном пласте в случае прямолинейного движения можно представить схематично следующим образом (рис. 104).

Впереди находится зона *1*, в которой наблюдается возрастание температуры от пластовой $T_{пл}$ до температуры $T_ф$ в зоне горения *2*. В этой зоне движутся нефть и продукты горения (азот, углекислота, вода), а также легкие фракции нефти, выделившиеся из нее до под-

хода зоны горения. Зона *2* является зоной бурных окислительных реакций или собственно зоной горения. Экспериментальные данные показывают, что зона *2* при сухом горении является узкой. Поэтому и вводят понятие о «фронте горения». Узость зоны *2* объясняется сильной зависимостью скорости окислительной реакции между коксом и кислородом воздуха от температуры. Обычно для описания скорости этой окислительной реакции, т. е. скорости расходования

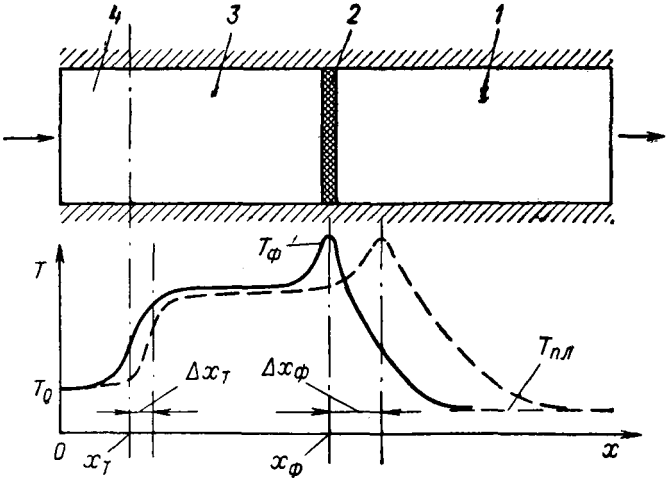



Рис. 104. Распределение температуры при внутрипластовом горении

на химическую реакцию кислорода и выделения тепла, используют [137, 52] формулу закона Аррениуса

$$w_q \sim \exp\left(-\frac{A}{RT}\right), \tag{5.1}$$

где $w_q$ — скорость выделения тепла; $A$ — энергия активации; $R$ — универсальная газовая постоянная.

Как видно из формулы (5.1), с ростом абсолютной температуры $T$ скорость окисления нефти и скорость выделения тепла резко возрастают и оказываются намного больше скорости перемещения зоны *2*.

Таким образом, кислород воздуха, поступающего в зону *2*, относительно быстро реагирует с остатком нефти, и возникает «фронт горения».

За зоной *2*, если идти в направлении, противоположном направлению потока окислителя, показанному на рис. 104 стрелками, имеется зона *3*, где происходит сначала резкое, а затем постепенное уменьшение температуры — от температуры на фронте горения $T_ф$ до температуры на входе в пласт $T_0$, т. е. практически до температуры закачиваемого в пласт окислителя (зона *4*). На некотором

расстоянии $x_т$ от входа в пласт ($x = 0$) происходит более резкое изменение температуры, чем в остальной части зон *3* и *4*. Это обусловливается конвективным переносом тепла закачиваемым в пласт окислителем. Расстояние $x_т$ назовем условно «фронтом конвекции».

Как будет видно из последующего изложения, основные технологические параметры процесса внутрипластового горения существенно зависят от скоростей движения фронтов горения и конвекции. Пути дальнейшего усовершенствования технологии метода внутрипластового горения также определяются в очень значительной степени возможностями управления скоростями движения этих фронтов. Для того чтобы узнать, от чего зависит скорость движения фронта горения, рассмотрим химическую сторону явления подземного горения. На основе экспериментальных исследований было определено, что при сгорании остатка нефти (кокса) образуются вода $H_2O$, окись углерода CO и двуокись углерода $CO_2$.

Химическая формула кокса очень сложна, однако ее элементный состав можно схематично представить в виде $CH_n$, где $n$ — отношение числа атомов водорода H к числу атомов углерода C в коксе. Обозначим еще через $m_0$ отношение числа молей $CO_2$ к числу молей CO в продуктах сгорания. Тогда химическую формулу горения кокса можно представить в виде [132]:

$$CH_n + x'O_2 = y'CO_2 + z'CO + \xi' H_2O. \qquad (5.2)$$

Числа $n$ и $m_0$ будем считать заданными. Необходимо определить коэффициенты $x'$, $y'$, $z'$ и $\xi'$. Поскольку все атомы водорода в коксе идут на образование воды, молекула которой содержит два атома водорода, то непосредственно получается, что $\xi' = n/2$. Выполняя условия равенства числа атомов углерода и кислорода в левой и правой частях уравнения (5.2) и помня, что $m_0 = y'/z'$, получаем следующую формулу:

$$CH_n + \left(\frac{2m_0+1}{2m_0+2} + \frac{n}{4}\right)O_2 = \frac{m_0}{m_0+1}CO_2 + \frac{1}{m_0+1}CO + \frac{n}{2}H_2O. \qquad (5.3)$$

Таким образом, из формулы (5.3) следует, что на один моль кокса будет приходиться $\frac{2m_0+1}{2m_0+2} + \frac{n}{4}$ молей кислорода. Молекулярный вес кокса, в котором на один атом углерода приходится $n$ атомов водорода, равен $12 + n$. Отсюда на один килограмм кокса приходится $\frac{\left(\frac{2m_0+1}{2m_0+2} + \frac{n}{4}\right)}{12+n}$ килограмм-молей $O_2$. Объем одного килограмм-моля газа при нормальных условиях равен 22,4 м³. Следовательно, на один килограмм кокса будет приходиться $22{,}4 \times \frac{\left(\frac{2m_0+1}{2m_0+2} + \frac{n}{4}\right)}{12+n}$ м³ газа $O_2$. Обозначим $z$ — содержание кокса в полном объеме пласта, включая пустоты. Величина $z$ выражается в кг/м³. Отсюда получаем выражение для объема $R_0$ окислителя,

необходимого для прохождения фронтом горения объема пласта, равного 1 м³:

$$R_0 = \frac{22{,}4\left(\frac{2m_0+1}{2m_0+2}+\frac{n}{4}\right)z}{a_1 a_2 (12+n)}. \qquad (5.4)$$

Здесь $a_1$ — содержание кислорода в окислителе; $a_2$ — степень использования окислителя.

По формуле (5.4) определяется объем окислителя, требующийся для «выжигания» одного кубического метра пласта.

Проведем расчеты по формуле (5.4). Примем согласно опытным данным $n = 1{,}6$, $m = 3{,}5$, $z = 25$ кг/м³, $a_1$ для воздуха равно 0,21, $a_2 = 0{,}9$. Тогда из (5.4) имеем

$$R_0 = \frac{22{,}4\left(\frac{8}{9}+0{,}4\right)\cdot 25}{0{,}21\cdot 0{,}9\,(12+1{,}6)} = \frac{22{,}4\cdot 1{,}29\cdot 25}{0{,}21\cdot 0{,}9\cdot 13{,}6} = 280 \text{ м}^3/\text{м}^3.$$

Экспериментальные исследования показывают, что скорость продвижения фронта горения прямо пропорциональна расходу окислителя.

Это означает, что изменение скорости подачи окислителя приводит к пропорциональному изменению скорости продвижения зоны горения или что размер зоны горения при этом практически не изменяется. Если бы изменялся размер зоны горения, то увеличение расхода окислителя приводило бы к увеличению размера зоны интенсивной реакции. Тогда скорость продвижения фронта горения определялась бы химической кинетикой, а не расходом окислителя.

Таким образом, если для прохождения фронтом горения одного кубометра пласта требуется $R_0$ м³ окислителя, то для скорости продвижения фронта горения $v_ф$ получаем простую формулу

$$v_ф = \frac{dx_ф}{dt} = \frac{Q_0}{R_0 S}, \qquad (5.5)$$

где $Q_0$ — расход окислителя, приведенный к атмосферным условиям; $S$ — площадь сечения пласта, через которое проходит фронт горения.

Формулы (5.4) и (5.5) являются очень важными в теории внутрипластового горения. Они позволяют определить основные показатели горения — расход окислителя и, при некоторых предположениях, — объем нефти, получаемой из пласта путем внутрипластового горения.

Сделаем расчеты. Допустим, что пористость пласта составляет 20%, начальная нефтенасыщенность 95%. Предположим также, что до проведения горения разработка пласта не осуществлялась никакими иными способами. Содержание нефти в одном кубическом метре пласта в данном случае при плотности нефти 900 кг/м³ будет $0{,}2\cdot 0{,}95\cdot 900 \approx 170$ кг/м³.

При осуществлении внутрипластового горения 25 кг/м³ нефти превращаются в кокс и сгорают. Таким образом, с 1 м³ пласта — выжженной его части — будет получено 170—25 = 145 кг нефти.

Затрата воздуха для выжигания 1 м³ пласта равна 280 м³. Отсюда на получение 1 т нефти из пласта за счет внутрипластового горения будет затрачиваться $280 \cdot 1000/145 = 2000$ м³ воздуха.

Для расчета давления нагнетания воздуха необходимо более подробное рассмотрение динамики жидкостей и газов в пласте при внутрипластовом горении нефти.

Однако прежде чем переходить к изложению термогидродинамической теории процесса внутрипластового горения, рассмотрим некоторые интересные особенности этого процесса. Выясним следующий вопрос: какими основными факторами определяется количество кокса, необходимое для поддержания внутрипластового горения?

Для этого требуется выяснить влияние на процесс горения скорости конвективного переноса тепла и скорости продвижения фронта горения, а также рассмотреть баланс тепла в пласте при внутрипластовом горении.

Для выяснения принципиальных закономерностей движения фронтов тепловой конвекции и горения будем приближенно считать, что в зонах *3* и *4* (см. рис. 104) существует только конвективный перенос тепла, а теплопроводность отсутствует. Пренебрежем пока и уходом тепла в кровлю и подошву. Тогда можно считать, что распределение температуры $T$ в зонах *3* и *4* определяется уравнением

$$f(T,\ p)\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial t}=0; \tag{5.6}$$

$$f(T,\ p)=\frac{c_г v_г \rho_г}{c_г \rho_г m + c_т \rho_т (1-m)},$$

где $c_г$, $c_т$ — удельные теплоемкости газа (воздуха) и пород пласта; $\rho_г$, $\rho_т$ — плотности газа и пород пласта; $m$ — пористость пласта; $v_т$ — скорость фильтрации газа.

Из (5.6) получается, например, следующее выражение для скорости $v_т$ фронта конвекции:

$$v_т=\frac{dx_т}{dt}=f(T,\ p). \tag{5.7}$$

Для скорости фронта горения имеем, в соответствии с (5.5), следующую формулу:

$$v_ф=\frac{i_г^0}{R_0},\quad v_г^0=\frac{Q_0}{S}, \tag{5.8}$$

где $S$, как и в формуле (5.5), — площадь сечения пласта.

Если приближенно считать окислитель (воздух) идеальным газом, то

$$v_г^0\rho_г^0=v_г\rho_г, \tag{5.9}$$

где $\rho_г^0$ — плотность окислителя в атмосферных условиях.

Для отношения $v_ф/v_т$ получаем на основе (5.7) и (5.8) следующую формулу [51]:

$$\frac{v_ф}{v_т} = \frac{c_т\rho_т(1-m)+c_г\rho_г m}{R_0 c_г \rho_г^0}. \qquad (5.10)$$

Произведем теперь оценку $v_ф/v_т$ по формуле (5.10). Воздух, используемый в качестве окислителя, имеет в интервале температур от 0 до 300° С удельную теплоемкость $c_г = 0{,}71$ Дж/кг·К = $= 0{,}17\cdot$ ккал/кг·°С. Плотность воздуха в атмосферных условиях равна 1,3 кг/м³. Пусть пластовое давление $p_{пл}$, при котором осуществляется горение, равно $49\cdot10^5$ Па = 50 кгс/см², а отношение начальной пластовой абсолютной температуры $T_{пл}$ к абсолютной температуре в третьей зоне $T_з$ равно $T_{пл}/T_з = 0{,}5$.

В этом случае в пластовых условиях плотность воздуха $\rho_г = \frac{\rho_г^0 p_{пл} T_{пл}}{T_з p_{ат}} = 1{,}3\cdot50\cdot0{,}5 = 32{,}5$ кг/м³ ($p_{ат}$ — атмосферное давление). Возьмем $m = 0{,}2$, $c_т = 1{,}05$ Дж/кг·К = 0,25 ккал/кг·°С, $\rho_т = 2{,}5\cdot10^3$ кг/м³.

Тогда $c_т\rho_т(1-m) = 0{,}25\cdot2{,}5\cdot10^3\cdot0{,}8 = 500$, а $c_г\rho_г = 0{,}17 \times 32{,}5\cdot0{,}2 \approx 1{,}1$. Следовательно, формулу (5.10) можно упростить, считая приближенно

$$\frac{v_ф}{v_т} \approx \frac{c_т\rho_т(1-m)}{R_0 c_г \rho_г^0}. \qquad (5.11)$$

При $R_0 = 280$ м³/м³ и приведенных выше данных

$$\frac{v_ф}{v_т} = \frac{500}{280\cdot0{,}17\cdot1{,}3} \approx 8.$$

Таким образом, при принятых выше параметрах фронт горения движется значительно быстрее фронта конвекции. Следовательно, генерируемое при внутрипластовом горении тепло остается в основном позади фронта горения. Если учитывать уход тепла в кровлю — подошву, то это тепло будет бесполезно рассеиваться в окружающие породы.

Теперь рассмотрим другую важную особенность процесса внутрипластового горения, связанную со скоростями движения фронтов тепловой конвекции и горения.

Если скорость движения фронта горения намного превышает скорость фронта конвекции, то при достаточно длительном ведении процесса внутрипластового горения распределение температуры в зонах *1*, *2* и *4* (см. рис. 104) будет мало меняться, а длина зоны *3* будет увеличиваться. За время $\Delta t$ фронт горения при этом продвинется на расстояние $\Delta x_ф$, а фронт конвекции — на $\Delta x_т$, так что весь профиль температуры передвинется вправо и займет новое положение, показанное на рис. 104 пунктирной линией. Легко видеть, что площадь, ограниченная кривой $T$ на этом рисунке и осью абсцисс, пропорциональна количеству тепла $q_т$, содержащемуся в пласте.

Представим теперь схематично распределение температуры при внутрипластовом горении в виде прямоугольника (рис. 105). За время $\Delta t$ фронт горения переместится на расстояние $\Delta x_ф$, а фронт конвекции — на расстояние $\Delta x_т$. Будем для простоты считать, что температура закачиваемого в пласт окислителя равна пластовой температуре $T_{пл}$. Согласно рис. 105 изменение содержания тепла в пласте $\Delta q_т$ определяется следующим образом:

$$\Delta q_т = (\overline{T} - T_{пл})\, c\rho S\, \Delta x_ф - (\overline{T} - T_{пл})\, c\rho S\, \Delta x_т, \qquad (5.12)$$

где $c\rho$ — произведение удельной теплоемкости на плотность вещества пласта в целом; $S$ — площадь поперечного сечения пласта; $\overline{T}$ — среднее значение температуры в нагретой зоне.

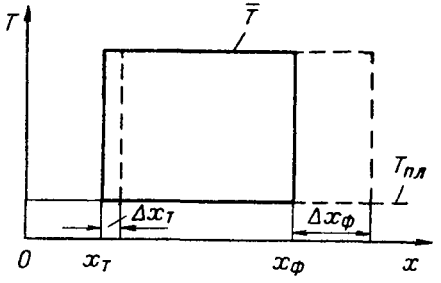



Рис. 105. Схематичное распределение температуры при внутрипластовом горении

Вместе с тем изменение содержания тепла в пласте за время $\Delta t$ определяется вводом тепла в пласт за счет сгорания кокса и уходом тепла в окружающие пласт породы. Следовательно,

$$\Delta q_т = zAS\, \Delta x_ф - \Delta q_п. \qquad (5.13)$$

Здесь $z$, как и выше, — содержание кокса в пласте в кг/м$^3$; $A$ — теплота сгорания кокса в ккал/кг; $\Delta q_п$ — утечка тепла в окружающие пласт породы за время $\Delta t$.

Если приравнять выражения (5.12) и (5.13), разделить левую и правую части полученного выражения на $\Delta t$ и устремить $\Delta t$ к нулю, получим после соответствующих преобразований следующую формулу:

$$z = \frac{c\rho\,(\overline{T} - T_{пл})\left(1 - \frac{v_т}{v_ф}\right) + \frac{w}{Sv_ф}}{A}, \qquad w = \frac{dq_п}{dt}. \qquad (5.14)$$

Из формулы (5.14) видно, что количество кокса, требующееся для поддержания внутрипластового горения при постоянной температуре $\overline{T}$ в нагретой зоне, через которую прошел фронт горения, существенно зависит от отношения $v_т/v_ф$, уменьшаясь при возрастании $v_т/v_ф$. При $v_т/v_ф = 1$ для поддержания горения в пласте требуется лишь такое количество кокса, которое нужно для компенсации потерь тепла в окружающие пласт породы.

Следует подчеркнуть, что формула (5.14), как и весь приведенный выше анализ движения фронтов горения и конвекции, не являются строгими и имеют лишь иллюстративный характер.

Если считать пласт полностью теплоизолированным ($w = 0$), то из формулы (5.14) получается, что для поддержания внутрипластового горения вовсе не потребуется коксового топлива, т. е. даже когда горения в пласте не будет, все температурные зоны смогут перемещаться на какое угодно расстояние.

Конечно, строго говоря, это не так. Из-за различия теплофизических свойств флюидов при различных температурах эти температурные зоны будут двигаться с различными скоростями и установившегося движения температурных зон не будет достигнуто. Однако при стремлении $v_т/v_ф$ к единице величина $z$ действительно будет существенно уменьшаться.

Заметим, что формулу (5.14) можно применять при $0 \leqslant v_т/v_ф \leqslant 1$.

Из приведенных выше рассуждений следует, что количество остаточного топлива, требующегося для осуществления внутрипластового горения, т. е. для поддержания температуры на фронте горения на определенном уровне, существенно зависит от характеристик переноса тепла в пласте.

Следует обратить внимание на то, что в формуле (5.14) имеется в виду именно требующееся количество кокса, а не то, которое фактически образуется при протекании процесса подземного горения. Фактическое количество кокса зависит от свойств исходной нефти, температуры процесса и т. д. Если фактическое количество кокса будет превышать требующееся, то, как следует из совместного рассмотрения формул (5.10) и (5.14), температура в нагретой зоне будет сильно возрастать.

## § 6. СОЧЕТАНИЕ ВНУТРИПЛАСТОВОГО ГОРЕНИЯ С ЗАВОДНЕНИЕМ

Рассмотрение в предыдущем параграфе особенностей процесса внутрипластового горения показывает, что ускорение тепловой конвекции позволяет не только быстрее продвигать нагретую зону в пласте и тем самым ускорять вытеснение нефти из пласта, но и может способствовать уменьшению требующегося для ведения процесса кокса, а следовательно, и количества генерируемого в пласте тепла и, что самое главное, окислителя (например, сжатого воздуха). Это может привести к существенной экономии требующегося для осуществления внутрипластового горения сжатого воздуха, составляющего значительную статью затрат.

Не менее важным фактором, как это видно из предыдущего анализа, является возможность ведения внутрипластового горения в пластах, содержащих малое количество кокса, что может иметь место, например, в залежах легких маловязких нефтей.

Каким же образом можно ускорить процесс тепловой конвекции в пласте? Одним из путей ускорения тепловой конвекции при внутрипластовом горении является закачка вместе с воздухом воды как более теплоемкого вещества.

Э. Б. Чекалюком, К. А. Огановым и А. Н. Снарским [87, 120] было предложено осуществлять перемещение предварительно нагретой за счет горения зоны пласта путем закачки в пласт воды. В дальнейшем были предложены [51, 135, 54, 128] способы осуществления внутрипластового горения путем непрерывной закачки в пласт смеси окислителя с водой. Механизм процесса, сочетающего подземное горение и заводнение и получившего название «влажного горения», стал известен лишь в последние годы.

Использование анализа движения фронтов горения и конвекции, проведенного в предыдущем параграфе, позволяет получить применительно к влажному горению следующую формулу, аналогичную формуле (5.10):

$$\frac{v_ф}{v_т^в} = \frac{c_т\rho_т(1-m)+m\left[c_г\rho_г(1-s_в)+c_в\rho_в s_в\right]}{R_0\left(c_г\rho_г^0+c_в\rho_в\dfrac{v_в}{v_г^0}\right)}. \qquad (6.1)$$

В этой формуле $c_в$, $\rho_в$ — соответственно удельная теплоемкость и плотность воды; $v_в$ — скорость фильтрации воды; $s_в^в$ — насыщенность водой порового пространства; $v_т^в$ — скорость фронта конвекции при влажном горении. Остальные обозначения — те же, что и в предыдущем параграфе.

Оценим теперь величину $v_ф/v_т^в$, используя те же значения исходных параметров, что и при расчете по формуле (5.11) предыдущего параграфа, принимая $c_в = 4{,}19\cdot10^3$ Дж/кг·К $= 1$ ккал/кг·°С, $\rho_в = 10^3$ кг/м$^3$. Тогда на основе формулы (6.1) получаем, что уже при $v_в/v_г^0 = 2\cdot10^{-3}$ величина $v_ф/v_т^в \approx 1{,}6$, что существенно отличается от значения $v_ф/v_т = 8$, полученного в предыдущем параграфе. Фронт конвекции при влажном горении будет перемещаться уже значительно быстрее, чем при сухом горении.

При осуществлении влажного горения закачиваемая в пласт вода будет передвигаться по пласту в виде пара как непосредственно в зоне горения, так и несколько впереди и позади нее. В соответствии с материальным балансом получаем

$$\rho_в v_в = \rho_п v_п, \qquad (6.2)$$

где $\rho_п$, $v_п$ — плотность в пластовых условиях пара и скорость фильтрации пара.

Если пренебречь в формуле (6.1) членом $c_г\rho_г(1-s_в)$, то из (6.1) с учетом (6.2) получим следующее выражение для соотношения скоростей фронта горения и тепловой конвекции в зоне пара:

$$\frac{v_ф}{v_т^п} \approx \frac{c_т\rho_т(1-m)+mc_п\rho_п}{R_0\left(c_г\rho_г^0+c_п\rho_в\dfrac{v_в}{v_г^0}\right)}. \qquad (6.3)$$

Выполним оценку по формуле (6.3). При давлении, например, 50 кгс/см$^2$ теплосодержание пара при $T = 300°$ С равно около 700 ккал/кг. Следовательно, $c_п = 2{,}34$ ккал/кг·°С. При этом $\rho_п \approx$

$\approx 0{,}02$ кг/м$^3$. Возьмем, например $v_в/v_г^0 = 10^{-3}$. Тогда при $m = 0{,}2$ из (6.3) получаем, что $v_ф/v_т^п \approx 1$. Следовательно, уже при $v_в/v_г^0 \geq 10^{-3}$, т. е. примерно при закачке 1 м$^3$ воды на 1000 м$^3$ воздуха при нормальных условиях, скорость конвекции тепла в паровой зоне будет равна или больше скорости фронта горения. При увеличении количества закачиваемой воды, приходящейся на каждые 1000 м$^3$ воздуха, впереди фронта горения образуется зона пара, которая и будет вытеснять нефть. Таким образом, процесс извлечения нефти из пластов при помощи влажного горения может быть назван процессом извлечения нефти путем внутрипластового парообразования, осуществляемого за счет реакции горения нефти. Механизм извлечения нефти из пластов этим способом будет во многом похож на механизм извлечения нефти паром или «оторочкой» пара. Однако при влажном горении в пласте возникают процессы, отсутствующие при закачке пара, например происходит реакция окисления нефти, в результате чего образуется углекислота $CO_2$, действующая как химический реагент, улучшающий извлечение нефти из недр. Могут образовываться также окислы углеводородов, проявляющие свойства поверхностно-активных веществ.

Для дальнейшего выяснения особенностей процесса извлечения нефти из недр путем сочетания подземного горения с заводнением, рассмотрим этот процесс на примере одномерного прямолинейного пласта.

Пусть пласт залегает горизонтально и перекрыт сверху и снизу непроницаемыми, но теплопроводящими породами (см. рис. 104). В некоторый момент времени после инициирования горения в пласт с конца $x = 0$ закачивается смесь воздуха с водой и тем самым осуществляется влажное горение. Пусть в рассматриваемый момент времени фронт горения находится на расстоянии $x_ф$ от входа в пласт. В области $0 \leqslant x \leqslant x_ф$ движется смесь воздуха с водой. Нефть из этой области была перемещена в области, находящиеся перед фронтом горения во время движения фронта горения. В области, находящейся справа от фронта горения (см. рис. 104), движутся на некотором расстоянии от фронта горения вода, азот, углекислый газ и другие продукты горения, а также нефть. Ввиду перемещения легких фракций нефти в процессе движения фронта горения из области $0 \leqslant x \leqslant x_т$ в область, находящуюся перед фронтом горения, в этой области может образоваться «вал нефти». Значения насыщенности порового пространства газами, водой и нефтью в рассматриваемой области можно получить из решения соответствующей термогидродинамической задачи. На распределение насыщенностей в зоне пласта, находящейся справа от фронта горения, будут существенно влиять фазовые проницаемости среды при движении в ней системы газ — вода — нефть, вязкость и плотность флюидов, зависящие от температуры, а также капиллярные силы и т. д.

Поскольку для процесса влажного внутрипластового горения имеет большое значение тепловая часть термогидродинамической задачи, остановимся на этом вопросе более подробно, ограничившись

качественным рассмотрением гидродинамической части задачи. При этом уход тепла в кровлю — подошву приближенно представим следующим образом. Допустим, что в части пород кровли и подошвы, непосредственно прилегающих к пласту, температура равна $\Theta$, а в более удаленной части пород кровли — подошвы она равна начальной, которую для простоты положим равной нулю. Температура в самом пласте равна $T_{пл}$. Уход тепла из пласта как в прилегающие, так и в более удаленные от пласта породы кровли — подошвы будем считать пропорциональным разности температур в соответствующих частях пород. Примем, что зона интенсивных окислительных реакций является узкой. Будем учитывать теплопроводность пласта и конвективный перенос тепла в пласте.

Теплоемкость и плотность пород обозначим соответственно $c_т$ и $\rho_т$, теплоемкость и плотности газа $c_г$ и $\rho_г$, теплоемкость и плотность воды и нефти будем учитывать осредненно, обозначив их соответственно $c_ж$ и $\rho_ж$. При решении этой тепловой задачи влажного внутрипластового горения примем, что горение как бы происходит в пласте, содержащем равномерно распределенный в пористой среде кокс, а в пласт подается смесь воздуха с жидкостью, которую при тепловых расчетах примем за воду.

Рассматривая баланс тепла в элементарном объеме пласта длиной $dx$ и мощностью $h$, получим следующее уравнение переноса тепла в пласте при влажном горении:

$$k_т \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = (c_г v_г \rho_г + c_ж v_ж \rho_ж) \frac{\partial T}{\partial x} +$$

$$+ [c_т \rho_т (1-m) + c_г \rho_г (1-s_ж) m + c_ж \rho_ж s_ж m] \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha (T - \Theta) -$$

$$- \frac{q_{возд} A}{\beta b_0 h} \delta (x_ф) = 0 \qquad (6.4)$$

и уравнение ухода тепла в породы кровли — подошвы

$$c_т \rho_т \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\alpha}{h} (T - \Theta) - \eta \Theta. \qquad (6.5)$$

В уравнениях (6.4) и (6.5) $q_{возд}$ — расход воздуха, приведенный к атмосферным условиям; $A$ — как и выше, теплота сгорания коксового остатка; $\beta$ — стехиометрический коэффициент; $k_т$ — коэффициент теплопроводности пород кровли — подошвы и самого пласта; $b_0$ — ширина пласта; $s_ж$ — насыщенность пористой среды жидкой фазой; $\alpha$ и $\eta$ — коэффициенты теплопередачи в породах кровли — подошвы; $t$ — время.

Последний член дифференциального уравнения (6.4) представлен $\delta$ — функцией Дирака на основе того, что при выводе уравнения (6.4) было принято, что фронт горения представляет собой очень узкую полосу, перпендикулярную направлению процесса.

Если привести уравнения (6.4) и (6.5) к безразмерному виду, то получим из них следующие два уравнения:

$$a\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}=b\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+c\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\rho(\varphi-\psi)-s\delta(\xi_\phi); \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=\rho(\varphi-\psi)-\omega\psi;$$

$$a=\frac{k_т\beta z}{c_т\rho_т L v_{возд}};\quad b=\frac{(c_г v_г\rho_г+c_ж v_ж\rho_ж)\beta z}{c_т\rho_т v_{возд}};$$

$$c=\frac{c_т\rho_т(1-m)+c_г\rho_г(1-s_ж)m+c_ж\rho_ж s_ж m}{c_т\rho_т};$$

$$\rho=\frac{\alpha\beta zL}{hc_т\rho_т v_{возд}};\quad s=\frac{Az}{c_т\rho_т T_*};$$

$$\omega=\frac{\eta\beta zL}{c_т\rho_т v_{возд}};\quad \varphi=\frac{T_1}{T_*},\quad \psi=\frac{\Theta_1}{T_*};$$

$$\tau=\frac{v_{возд}t}{\beta zL};\quad \xi=\frac{x}{L};\quad T_1=T-T_{пл};$$

$$\Theta_1=\Theta-T_{пл}.$$

В приведенных выше выражениях (6.6) $L$ — длина пласта, $T_*$ — температура начала интенсивной реакции окисления (горения), $T_{пл}$ — пластовая температура, $v_{возд}=q_{возд}/S$ ($S$ — площадь поперечного сечения пласта). Входящие в (6.6) величины $b$ и $c$ сами зависят от температуры $T$ или безразмерной температуры $\varphi$. Анализ показывает, что $c$ сравнительно мало зависит от $\varphi$, в то время как $b$ зависит существенно.

Учитывая, что $v_{возд}\rho_г^0=v_г\rho_г=v_{возд}\rho_{возд}^0$ ($\rho_{возд}^0$ — плотность воздуха в нормальных условиях), получаем

$$b=\frac{\left(c_{возд}\rho_{возд}^0+c_ж\frac{\rho_ж v_ж}{v_{возд}}\right)\beta z}{c_т\rho_т}. \tag{6.7}$$

Величина $\rho_ж v_ж/v_{возд}=\lambda$ является водовоздушным отношением, равным отношению веса воды к единице объема воздуха в нормальных условиях. При постоянных $\lambda$, $c_{возд}$, $\rho_{возд}$, $\beta z$ и $c_т\rho_т$ оказывается, что в выражении (6.7) единственной величиной, существенно зависящей от $\varphi$, является $c_ж$, если учесть, что жидкие вещества, движущиеся в пласте при определенных температуре и давлении, испаряются и изменяют свое удельное теплосодержание.

В дальнейших тепловых расчетах будем приближенно принимать, что в зонах до фронта горения, на фронте горения и в нагретой зоне перед фронтом горения движутся только воздух или азот, вода или водяной пар. Таким образом, будем считать, что $c_ж=c_{в.п}$ ($c_{в.п}$ — удельное теплосодержание, выраженное в ккал/кг·°С для воды или водяного пара). При движении флюидов в пористой среде в процессе влажного горения давление по длине пласта будет

изменяться. Это обстоятельство в рассматриваемой задаче не учитывается, а принимается осредненное давление по длине пласта.

На рис. 106 представлены $c_{в.п} = c_{в.п}(\varphi)$ и $b = b(\varphi)$ для воды при осредненном давлении в пласте $0{,}981 \cdot 10^7$ Па = 100 кгс/см$^2$,

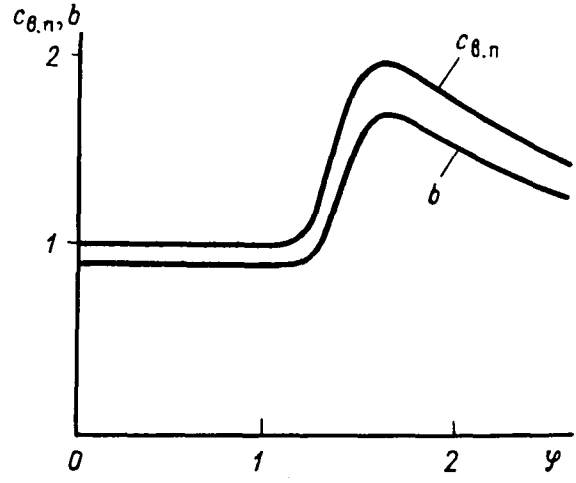



Рис. 106. Зависимость $C_{в.п}$ и $b$ от $\varphi$

начальной пластовой температуре $T_{пл} = 30°$ С, $T_* = 200°$ С и $\lambda = 2$. Здесь $\varphi = (T - T_{пл})/T_*$.

При решении рассматриваемой задачи было принято, что горение в пластовых условиях может происходить не при температуре

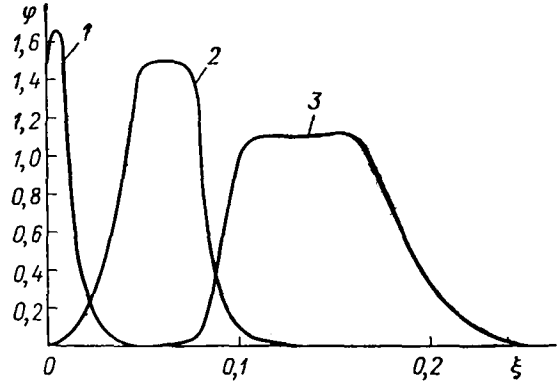



Рис. 107. Распределение температуры по длине пласта при влажном горении

начала реакции окисления $T_*$, а при несколько более высокой температуре $T_{**} > T_*$. Принимать это положение не всегда необходимо.

Решение данной задачи было получено численным методом. При конечно-разностной аппроксимации основных уравнений (6.6) было принято, что в каждом отрезке пласта длиной $\Delta\xi$ выгорание кокса происходит за время, кратное отрезку времени $\Delta t$, так что

$$\Delta\xi = \nu\,\Delta\tau, \tag{6.8}$$

где $\nu$ — коэффициент пропорциональности.

Если безразмерная температура в отрезке $\Delta\xi$ снижалась ниже $\varphi_* = (T_{**} - T_{пл})/T_*$, вычислительная программа предусматривала неполное выгорание топлива в отрезке $\Delta\xi$ и переход процесса горения на следующий отрезок $\Delta\xi$ по ходу процесса.

На рис. 107 показано изменение температуры по длине пласта в процессе горения при следующих безразмерных параметрах: $\Delta\xi = 0{,}5\cdot10^{-2}$; $s = 1{,}0$; $\Delta\tau = 10^{-4}$; $a = 0{,}125\cdot10^{-2}$; $\rho = 0{,}5$; $\omega = 0{,}5$. Свойства жидкости (воды) были взяты при давлении $p = 9{,}81\cdot10^6$ Па (100 кгс/см$^2$). Начальная температура пласта $T_{пл}$ была принята равной 30° С.

Можно полагать, что указанные выше параметры соответствуют процессу влажного горения в пласте длиной 200 м. Предполагалось, что после первоначального прогрева пласта вплоть до достижения температуры воспламенения нефти процесс влажного горения осуществлялся при водо-воздушном соотношении $\lambda = 2$ до тех пор, пока фронт горения не дошел (см. рис. 107) до отметки $\xi = 10^{-2}$ (прошел 2 м). Затем увеличили закачку воды при неизменном расходе подаваемого в пласт воздуха до $\lambda = 6$.

Из рис. 107 видно, что при $\lambda = 2$ температура в пласте сначала была довольно высокой (свыше 320° С — кривая *1*).

При переходе на $\lambda = 6$ температура снижается примерно до 280° С, но при этом интенсивно развивается зона высокой температуры впереди фронта горения (рис. 107, кривая *2*). Процесс влажного горения превращается в так называемый процесс «сверхвлажного» горения или процесс с неполным выгоранием топлива. Например, согласно температурной кривой *3* (рис. 107), соответствующей безразмерному времени $\tau = 0{,}0889$, горение происходит в точке $\xi = 10{,}5\cdot10^{-2}$ (на расстоянии 21 м от начала пласта), а зона повышенной температуры продвинулась более чем на 40 м, при этом примерно 40% от первоначального количества кокса остается в пласте несгоревшим.

Приведенные выше результаты расчета относятся лишь к определенным реальным условиям.

Эффект ускорения переноса тепла в пласте при влажном горении по сравнению с сухим горением подтвержден лабораторными экспериментами [128].

Известны результаты опытных работ, проведенных в реальных пластах, показывающие, что расход воздуха, приходящийся на тонну получаемой нефти при влажном горении, существенно ниже, чем при сухом горении.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Абасов М. Т., Абдуллаев А. А., Кулиев А. М. Линейное вытеснение газированной нефти водой. Теория и практика добычи нефти. Ежегодник ВНИИ. М., «Недра», 1966, с. 120—128.

2. Абасов М. Т., Джалилов К. Н. Вопросы подземной гидродинамики и разработки нефтяных и газовых месторождений. Баку, Азнефтнешр, 1960, 256 с.

3. Аббасов А. А. Гидродинамические и экспериментальные исследования вопросов, связанных с применением термического метода воздействия. Баку, Изд-во АН АзССР, 1966, 66 с.

4. Авакян Э. А., Горбунов А. Т., Николаевский В. Н. Нелинейно-упругий режим фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах. Теория и практика добычи нефти. Ежегодник ВНИИ. М., «Недра», 1968, с. 165—173.

5. Авдонин Н. А., Рубинштейн Л. И. Расчет нефтеотдачи нефтяных пластов в неизотермических условиях фильтрации. Теория и практика добычи нефти. Ежегодник ВНИИ. М., «Недра», 1966, с. 195—205.

6. Амикс Дж., Басс Д., Уайтинг Р. Физика нефтяного пласта. Пер. с англ. М., Гостоптехиздат, 1962, 572 с.

7. Антимиров М. Я. К вопросу об интегральной величине тепловых потерь при тепловой инжекции в пласт. Теория и практика добычи нефти' Ежегодник ВНИИ. М., «Недра», 1966, с. 206—213.

8. Багиров М. А. Расчет прогрева призабойной зоны скважин. «Нефтяное хозяйство», 1964, № 12, с. 47—51.

9. Байдюк Б. В. Механические свойства горных пород при высоких давлениях и температурах. М., Гостоптехиздат, 1963, 102 с.

10. Баишев Б. Т. Функции распределения проницаемости и учет неоднородности пласта при проектировании разработки нефтяных месторождений. Труды ВНИИ, вып. 28. М., Гостоптехиздат, 1960, с. 39—66.

11. Бан А., Басниев К. С., Николаевский В. Н. Об основных уравнениях фильтрации в сжимаемых пористых средах. ПМТФ, 1961, № 3, с. 52—55.

12. Баренблатт Г. И., Крылов А. П. Об упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 2. с. 5—13.

13. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956, с. 475—486.

14. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины. ПММ, т. XXIII, 1959, с. 434—444.

15. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ДАН СССР, т. 132, № 3, 1960, с. 545—548.

16. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, т. XXIV, вып. 5, 1960, с. 852—864.

17. Баренблатт Г. И. О движении газожидкостных смесей в трещиновато-пористых породах. Изв. АН СССР «Механика и машиностроение», 1964, № 3, с. 47—50.

18. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., «Недра», 1972, 288 с.

19. Бернадинер М. Т. О предельной конфигурации застойных зон при вытеснении вязко-пластичной нефти водой. Изв. АН СССР, «Механика жидкости и газа», 1970, № 6, с. 146—149.

20. Берчик Э. Д. Свойства пластовых жидкостей. Пер. с англ. М., Гостоптехиздат, 1960, 184 с.

21. Боксерман А. А., Желтов Ю. П., Кочешков А. А. О движении несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористой среде. ДАН СССР т. 155, № 6, 1964, с. 1282—1285.

22. Боксерман А. А., Шалимов Б. В. О циклическом воздействии на пласты с двойной пористостью при вытеснении нефти водой. Изв. АН СССР, «Механика жидкости и газа», 1967, № 2, с. 168—174.

23. Борисов Ю. П. Учет неоднородности пласта при проектировании разработки нефтяной залежи. Труды ВНИИ, вып. XXI, 1959, с. 245—260.

24. Бузинов С. Н., Умрихин И. Д. Гидродинамические методы исследования скважин и пластов. М., «Недра», 1973, 246 с.

25. Васильев Ю. Н. Механизм расширения трещин при гидроразрыве в карбонатных коллекторах. «Нефтяное хозяйство», 1958, № 6, с. 32—36.

26. Вахитов Г. Г. Разностные методы решения задач разработки нефтяных месторождений. Л., «Недра», 1970, 248 с.

27. Волков И. А. К вопросу об упругом режиме фильтрации в трещиновато-пористой среде. Сб. «Исследования по матем. и эксперим. физ. и механ.». М. — Л., «Недра», 1965, с. 7—11.

28. Гаттенбергер Ю. П. Гидрогеология и гидродинамика подземных вод. М., «Недра», 1971, 184 с.

29. Герсеванов Н. М. Исследования в области динамики грунтовой массы, механики и прикладной математики, т. 2. М., Стройвоенмориздат, 1948, 375 с.

30. Гидравлический разрыв пласта с подземным обследованием зоны разрыва. Авт.: Усачев П. М., Лесик Н. П., Овнатанов Г. Т., Ечеистов А. И., Белов В. И., Генс М. А., Мишаков В. Н. «Нефтяное хозяйство», 1958, № 5, с. 28—37.

31. Гиматудинов Ш. К. Физика нефтяного и газового пласта. М., «Недра», 1971, 309 с.

32. Глоговский М. М., Розенберг М. Д. Вытеснение газированной нефти водой в случае радиальной фильтрации. Труды Моск. нефт. ин-та, вып. 12, 1953, с. 206—223.

33. Горбанец В. К., Хазнаферов А. И. Экспериментальные исследования вытеснения остаточной нефти растворителем из обводненных пластов. НТС «Нефтепромысловое дело», 1964, № 9, с. 7—11.

34. Горбунов А. Т., Николаевский В. Н. О нелинейной теории упругого режима фильтрации. Ежегодник ВНИИ. М., «Недра», 1964, с. 73—95.

35. Гроот де С. Р. Термодинамика необратимых процессов. М., Гостехтеориздат, 1956, 280 с.

36. Гурбанов Р. С., Касимов А. Ф., Мирзаджанзаде А. Х. Гидродинамика вязкопластичных сред. Теория и практика добычи нефти. Ежегодник ВНИИ. М., «Недра», 1968, с. 83—94.

37. Гусейн-Заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. М., «Недра», 1965, 276 с.

38. Гусейнов Г. П. Некоторые вопросы гидродинамики нефтяного пласта. Баку, Азернешр, 1961, 231 с.

39. Данилов В. Л. О движении водонефтяного контакта в пласте при упруго-водонапорном режиме. Изв. Казан. фил. АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 13. Казань, 1959, с. 117—124.

40. Джонс П. Механика нефтяного пласта. М. — Л., Гостоптехиздат, 1947, 181 с.
41. Добрынин В. М. Деформация и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа. М., «Недра», 1970, с. 239.
42. Ентов В. М. О некоторых двумерных задачах теории фильтрации с предельным градиентом. ПММ, т. 31, № 5, 1967, с. 821—833.
43. Желтов Ю. В., Желтов Ю. П. О распространении горизонтальной трещины в горной породе под воздействием нефильтрующейся жидкости в случае постоянного горного давления. Изв. АН СССР, ОТН, серия «Механ. и машиностр.», 1959, № 5, с. 166—169.
44. Желтов Ю. В., Касимов Р. Ш. О возможности одновременного образования нескольких трещин при гидроразрыве пласта. Изв. АН СССР, ОТН, серия «Механ. и машиностр.» 1963, № 6, с. 85—87.
45. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5, с. 3—41.
46. Желтов Ю. П., Золотарев П. П. О фильтрации газа в трещиноватых породах. ПМТФ, № 5, 1962, с. 135—139.
47. Желтов Ю. П., Розенберг М. Д. О фильтрации многокомпонентных систем. ВНИИ, НТС по добыче нефти, № 18. М., Гостоптехиздат, 1962, с. 9—13.
48. Желтов Ю. П. О перемешивании взаиморастворимых жидкостей с различными вязкостями при их движении в пористой среде. НТС по добыче нефти, вып. 24. М., «Недра», 1964, с. 34—40.
49. Желтов Ю. П., Кутляров В. С. О неустановившемся движении жидкости в трещиновато-пористом пласте при периодическом изменении давления на его границе. ПМТФ, № 6, 1965, с. 69—76.
50. Желтов Ю. П. Деформации горных пород. М., «Недра», 1966, 198 с.
51. Желтов Ю. П. О вытеснении нефти из пластов движущимся фронтом горения. Теория и практика добычи нефти. Ежегодник ВНИИ. М., «Недра», 1968, с. 212—220.
52. Желтов Ю. П., Коробков Е. И. Исследования начальной стадии внутрипластового горения. Труды ВНИИ, вып. 47. М., «Недра», 1973, с. 195—206.
53. Забродин П. И., Раковский Н. Л., Розенберг М. Д. Вытеснение нефти из пласта растворителями. М., «Недра», 1968, 224 с.
54. Извлечение нефти из пластов методом «влажного» горения. НТС по добыче нефти, вып. 42. М., «Недра», 1971, с. 92—98. Авт. Боксерман А. А., Жданов С. А., Желтов Ю. П., Кочешков А. А.
55. Исследование горного давления геофизическими методами. М., «Наука», 1967, 215 с. Авт.: Ризниченко Ю. В. и др.
56. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. Пер. с англ. М., «Мир», 1964. 350 с.
57. Котяхов Ф. И. Основы физики нефтяного пласта. М., Гостоптехиздат, 1956, 364 с.
58. Кочешков А. А., Кусаков М. М., Лубман Н. М. Механизм капиллярной пропитки и капиллярного вытеснения в пористых средах. Изв. вузов, серия «Нефть и газ», 1958, № 11, с. 59—64.
59. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. М., ОГИЗ, 1948, 612 с.
60. Кристеа Н. Подземная гидравлика. М., Гостоптехиздат, т. I, 1961, 343 с; т. II, 1962, 491 с.
61. Курбанов А. К. Об эксплуатации подгазовых нефтяных залежей. Изв. вузов, серия «Нефть и газ», 1958, № 6, с. 43—50.
62. Курбанов А. К., Юсупова З. С., Тихомирова К. И. О динамике адсорбции при вытеснении нефти растворами ПАВ. Труды ВНИИ, вып. 44. М., «Недра», 1972, с. 10—13.
63. Кутляров В. С. Конвективная диффузия в трещиновато-пористых средах. ПМТФ, № 1, 1967, с. 84—88.
64. Лейбензон Л. С. Движение газа в пористой среде. «Нефтяное хозяйство», 1929, № 10, с. 497—519.

65. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М. — Л., Гостехиздат, 1947, 244 с.
66. Лейбензон Л. С. Собрание трудов, т. 2. «Подземная гидрогазодинамика». М., Изд-во АН СССР, 1953, 544 с.
67. Ломизе Г. М. Фильтрация в трещиноватых породах. М. — Л., Госэнергоиздат, 1951, 127 с.
68. Лютин Л. В. К вопросу о применении поверхностно-активных веществ для уменьшения остаточной нефтенасыщенности при вытеснении нефти водой. Труды ВНИИ, вып. XV. М., Гостоптехиздат, 1958, с. 110—121.
69. Майдебор В. Н. Разработка нефтяных месторождений с трещиноватыми коллекторами. М., «Недра», 1971, 231 с.
70. Макрокинетика процессов в пористых средах. Авт.: Чизмаджев Ю. А., Маркин В. С., Тарасевич М. Р., Чирков Ю. Г., М., «Наука», 1971, 363 с.
71. Максимович Г. К. Гидравлический разрыв нефтяных пластов. М., Гостоптехиздат, 1957, 98 с.
72. Малофеев Г. Е. Потери тепла в кровлю и подошву при закачке в пласт горячей воды. Изв. вузов, сер. «Нефть и газ», 1959, № 5, с. 37—43.
73. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М. — Л., Гостоптехиздат, 1949, 628 с.
74. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. М. — Л., Гостоптехиздат, 1953, 606 с.
75. Механические и абразивные свойства горных пород. М., Гостоптехиздат, 1958, 201 с. Авт.: Шрейнер Л. А., Петрова О. П., Якушев В. П., Портнова А. Т., Садиленко К. М., Клочко Н. А., Павлова Н. Н., Баландин П. С., Спивак А. И.
76. Миллионщиков М. Д. Обводнение скважин подошвенной водой. Инженерный сборник АН СССР, ОТН, V, вып. 1. 1948, с. 182—188.
77. Миллионщиков М. Д. Турбулентные течения в пристеночном слое и в трубах. «Атомная энергия», т. 28, вып. 3, 1970, с. 207—220.
78. Мирзаджанзаде А. Х. О теоретической схеме явления поглощения и ухода раствора. ДАН АзССР, т. 9, № 4, 1953, с. 203—206.
79. Мирзаджанзаде А. Х., Огибалов П. М., Керимов З. Г. Термовязко-упругость и пластичность в нефтепромысловой механике. М., «Недра», 1973, 275 с.
80. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954, 648 с.
81. Мятиев А. Н. Напорный комплекс подземных вод и колодцы. Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1947, с. 1069—1088.
82. Непримеров Н. Н., Пудовкин М. А., Марков А. И. Особенности теплового поля нефтяного месторождения. Казань, Изд-во КГУ, 1968, 163 с.
83. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах. ПММ, т. XXIII, вып. 6, 1959, с. 1042—1050.
84. О неизотермической фильтрации многофазного потока и об учете термодинамических эффектов при разработке нефтяных месторождений. Труды ВНИИ, вып. XLII, М., «Недра», 1965 с. 281—293. Авт.: Теслюк Е. В., Розенберг М. Д., Капырин Ю. В., Требин Г. Ф.
85. Об отложении парафина из пластовых нефтей. Труды ВНИИ, вып. VIII. М. — Л., Гостоптехиздат, 1956, с. 369—378. Авт.: Фокеев В. М., Намиот А. Ю, Бондарева М. М., Ульянинский Б. В.
86. Оганджанянц В. Г. Экспериментальные исследования вытеснения нефти из неоднородных коллекторов. Труды ИГиРГИ, т. II. М., Изд-во АН СССР, 1961, с. 129—137.
87. Оганов К. А. Основы теплового воздействия на нефтяной пласт. М., «Недра», 1967, 203 с.
88. Особенности фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах. «Теория и практика добычи нефти». Ежегодник ВНИИ. М., «Недра», 1966, с. 214—226. Авт.: Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Глумов И. Ф., Фоменко И. Е.

89. Павловский Н. Н. Движение грунтовых вод. Собр. соч. М., Изд-во АН СССР, т. II, 1956, 771 с.
90. Пилатовский В. П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М., «Недра», 1966, 317 с.
91. Пирвердян А. М. Нефтяная подземная гидравлика. Баку, Азнефтеиздат, 1956, 332 с.
92. Пискунов Н. С. Об извлечении нефти из нефтяных пластов с подошвенной водой. Труды ВНИИ, вып. X. М., Гостоптехиздат, 1957, с. 88—100.
93. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехтеоризда т, 1952, 676 с.
94. Проектирование разработки нефтяных месторождений. М., Гостоптехиздат, 1962, 430 с. Авт.: Крылов А. П., Белаш П. М., Борисов Ю. П., Бучин А. Н., Воинов В. В., Глоговский М. М., Максимов М. И., Николаевский Н. М., Розенберг М. Д.
95. Пыхачев Г. Б., Исаев Р. Г. Подземная гидравлика. М., «Недра», 1973, 359 с.
96. Разработка газоконденсатных месторождений. М., «Недра», 1967, 356 с. Авт.: Мирзаджанзаде А. Х., Дурмишьян А. Г., Ковалев А. Г., Аллахвердиев Т. А.
97. Розенберг М. Д. Об одной нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных, имеющей приложение в теории фильтрации. ДАН СССР, т. 89, № 2, 1953, с. 233—236.
98. Ромм Е. С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. М., «Недра», 1966, 283 с.
99. Руппенейт К. В. Некоторые вопросы механики горных пород. М., Углетехиздат, 1954, 384 с.
100. Садчиков П. Б. Экспериментальное исследование кинетики образования и оседания конусов газа в нефтяном пласте. Труды ВНИИ. Гостоптехиздат, 1963, с. 35—52.
101. Саттаров М. М. Определение дебитов скважин, эксплуатирующих неоднородный пласт. Изв. вузов, «Нефть и газ», 1960, № 4, с. 67—71.
102. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1965, 386 с.
103. Султанов Б. И. О фильтрации вязко-пластических жидкостей в пористой среде. «Азерб. нефт. хоз-во», № 1, 1962, с. 25—28.
104. Сургучев М. Л. Об эффективности импульсного (циклического) воздействия на пласт для повышения его нефтеотдачи. ВНИИ, НТС по добыче нефти, № 27. М., «Недра», 1965, с. 66—72.
105. Таиров Н. Д., Везиров Д. Ш., Керимова Ф. Г. Исследование механизма капиллярного вытеснения нефти водой из неоднородных пористых сред при высоких температурах. Сб. научн. трудов ВНИИ, вып. 45. М., «Недра», 1973, с. 3—7.
106. Телков А. П., Стклянин Ю. И., Образование конусов воды при добыче нефти и газа. М., «Недра», 1965, 163 с.
107. Термоинтенсификация добычи нефти. М., «Недра», 1971, 279 с. Авт.: Байбаков Н. К., Брагин В. А., Гарушев А. Р., Толстой И. В.
108. Терцаги К. Основания механики грунтов. М., Геолразведиздат, 1932, 80 с.
109. Тихонов А. Н., Жуховицкий А. А., Забежинский Я. Л. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала ЖФХ, 20, вып. 10, 1946, с. 1113—1126.
110. Требин Ф. А. Нефтепроницаемость песчаных коллекторов. М. — Л., Гостоптехиздат, 1945, 140 с.
111. Требин Г. Ф., Капырин Ю. В. О кристаллизации парафина в призабойной зоне нефтяных скважин. «Нефтяное хозяйство», 1964, № 8, с. 39—45.
112. Фенчер Д., Льюис Д., Бернс К. Физические испытания пород нефтяных и газовых пластов и их свойства. «Иностранная нефтяная техника», вып. 105. Баку — М., Азнефтеиздат, 1935, 32 с.

113. Флорин В. А. Основные уравнения консолидации земляной среды. ДАН СССР, № 1, 1948, с. 21—24.
114. Физико-химические основы применения поверхностно-активных веществ при разработке нефтяных пластов. М., Гостоптехиздат, 1962, 283 с. Авт.: Бабалян Г. А., Кравченко И. И., Мархасин И. Л., Рудаков Т. В.
115. Фильтрация газированной жидкости и других многокомпонентных смесей в нефтяных пластах М., «Недра», 1969, 453 с. Авт.: Розенберг М. Д., Кундин С. А., Курбанов А. К., Суворов Н. И., Шовкринский Г. Ю.
116. Христианович С. А. О движении газированной нефти в пористых средах. ПММ, т. V, вып. 2, 1941, с. 277—282.
117. Царевич К. А. Приближенный способ расчета притока нефти и газа к скважинам при режиме растворенного газа. Труды МНИ, № 5, М., Гостоптехиздат, 1947 с. 217—235.
118. Чарный И. А. Строгое доказательство формулы Дюпюи для безнапорной фильтрации с промежутком высачивания. ДАН СССР, т. 79, № 6, 1951, с. 937—940.
119. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963, 396 с.
120. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта. М., «Недра», 1965, 238 с.
121. Швидлер М. И. Фильтрационные течения в неоднородных средах. М., Гостоптехиздат, 1963, 136 с.
122. Шейдеггер А. Е. Физика течения жидкостей через пористые среды. Пер. с англ. М., Гостоптехиздат, 1960, 249 с.
123. Шейнман А. Б., Дубровай К. К. Подземная газификация нефтяных пластов и термический способ добычи нефти. М. — Грозный — Л., ОНТИ, 1934, 95 с.
124. Шейнман А. Б., Малофеев Г. Е., Сергеев А. И. Воздействие на пласт теплом при добыче нефти. М., «Недра», 1969, 256 с.
125. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. М. — Л., Гостоптехиздат, 1949, 523 с.
126. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959, 467 с.
127. Экспериментальное изучение капиллярного удержания воды в пористых средах при упруго-капиллярном режиме. Труды ВНИИ, вып. L. М., «Недра», 1967, с. 94—101. Авт.: Боксерман А А., Желтов Ю. П.; Музафаров К. Э., Оганджанянц В. Г.
128. Экспериментальное исследование влияния величины водовоздушного отношения на параметры процесса внутрипластового горения. Труды ВНИИ, вып. 47. М., 1973, с. 236—246. Авт.: Боксерман А. А., Жданов С. А., Кочешков А. А., Полковников В. В.
129. Эфрос Д. А., Оноприенко В. П. Моделирование линейного вытеснения нефти водой. Труды ВНИИ, вып. 12. М., Гостоптехиздат, 1958, с. 331—360.
130. Эфрос Д. А. Исследования фильтрации неоднородных систем. Л., Гостоптехиздат, 1963, 351 с.
131. Aronofsky I. S., Heller I. P. A diffusion model to explain mixing of flowing miscible fluids in porous media. J. of Petrol. Technol. N 12, 1957, pp. 345—349.
132. Benham A. L., Poettman F. H. The thermal recovery process — an analysis of laboratory combustion Data. Trans. AIME, vol. 213, 1958, pp. 406—408.
133. Biot M. A. General theory of three-dimensional consolidation. J. of Appl. Physics. vol. 12, N 2, 1941, pp. 155—164.
134. Buckley S., Leverett M. C. Mechanism of fluid displacement in sands. Trans. AIME, vol. 146, 1942, pp. 107—116.
135. Dietz D. N., Weijdema I. Wet and partially quenched combustion. J. of Petrol. Technol., vol. XX, N 4, 1968, pp. 411—415.

136. Everdingen Van. A. F., Hurst W. The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs. J. of Petrol. Technol., vol. 1, N 12, 1949, pp. 305—326.
137. Gottfried B. S. A mathematical model of thermal oil recovery in linear systems. Soc. of Petrol. Eng. J., vol. 5, N 3, 1965, pp. 196—210.
138. Haimson B., Fairhurst C. Initiation and extension of hydraulic fractures in rocks. Soc. of Petrol. Eng. J., Sept., 1967, p. 310—318.
139. Hubbert M. K., Willis D. G. Mechanics of hydraulic fracturing. J. of Petrol. Technol. vol. 9, N 6, 1957, pp. 153—166.
140. Jacob C. E. On the flow of water in an elastic artesian aquifer. Trans. Am. Geophys. Union, 1940, p. 11.
141. Koch H. A., Slobod R. L. Miscible slug process. J. of Petrol. Technol., vol. 210, N 2, 1957, pp. 40—47.
142. Kuhn C. S., Koch R. L. In situ combustion-newest method of increasing oil recovery. Oil and Gas J., vol. 52, N 14, 1953, pp. 92—96.
143. Lauverier H. A. The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid. Appl. Scientific research, Sect. A, vol. 5, N 2—3, 1955, pp. 145—150.
144. Marx I. W., Langenheim R. H. Reservoir heating by hot fluid injection. Petrol. Trans. AIME, vol. 216, 1959, pp. 312—315.
145. Mattax C., Kyte I. Imbibition oil recovery from fractured water-drive reservoir. Soc. Petrol. Eng. J., 1962, N 2, pp. 177—184.
146. Muskat M. and Meres M. W. Flow of heterogeneous fluids through porous media. Physics, vol. 7, N 9, 1936.
147. Perkins T. K., Kern L. R. Widths of hydraulic fractures. J. of Petrol. Technol., vol. 13, N 9, p. 1961, pp. 937—949.
148. Ramey H. I. Transient heat conduction during radial movement of a cylindrical heat source — application to the thermal recovery process. Trans. AIME, vol. 216, 1959, pp. 115—122.
149. Rapoport L. A., Leas W. I. Properties of linear waterfloods. Trans. AIME, vol. 198, 1953, pp. 139—148.
150. Rosenberg Von D. V. Mechanics of steadystate singlephase fluid displacement from porous media. Trans. AICHE, N 2, 1956.
151. Scott P. P., Bearden W. G., Howard G. C. Rock rupture as affected by fluid properties. J. of Petrol. Technol. vol. 198, April, 1953, pp. 111—124.
152. Wyckoff R. D. and Botset H. F. The flow of gas liquid mixtures through unconsolidated sands. Physics, vol. 7, 1936.

## ОГЛАВЛЕНИЕ


Стр.

Предисловие . . . . . 3

Глава I. **Основные понятия механики сплошных сред** . . . . . 5

§ 1. Подобие и моделирование . . . . . 5
§ 2. Основные понятия векторного исчисления, теории поля и тензорного исчисления . . . . . 11
§ 3. Сплошная среда. Тензоры напряжений и деформаций . . . . 17
§ 4. Уравнения динамики сплошных сред . . . . . 21
§ 5. Течения вязкой жидкости . . . . . 25
§ 6. Некоторые сведения из теории функций комплексного переменного . . . . . 30
§ 7. Уравнения и решения задач теории упругости . . . . . 32

Глава II. **Свойства горных пород, жидкостей и газов** . . . . . 40

§ 1. Горные породы . . . . . 40
§ 2. Пластовые жидкости и газы . . . . . 47
§ 3. p*V*T-соотношения многокомпонентных систем . . . . . 51
§ 4. Капиллярные силы . . . . . 63

Глава III. **Подземное движение жидкостей и газов** . . . . . 70

§ 1. Основной закон классической теории фильтрации . . . . . 70
§ 2. Установившаяся фильтрация однородной жидкости . . . . . 75
§ 3. Неустановившаяся фильтрация жидкости . . . . . 84
§ 4. Движение газа в пористой среде . . . . . 90
§ 5. Вытеснение нефти водой из пористой среды . . . . . 95
§ 6. Движение жидкости в неоднородных и трещиноватых пластах 104
§ 7. Вытеснение нефти водой из трещиновато-пористого пласта . . 112
§ 8. Фильтрация газированной жидкости . . . . . 118
§ 9. Влияние силы тяжести на подземное движение нефти и газа 125
§ 10. Конвективная диффузия. Сорбция . . . . . 128
§ 11. Фильтрация неньютоновских жидкостей . . . . . 135

Глава IV. **Деформация горных пород** . . . . . 141

§ 1. Естественное напряженное состояние горных пород и его изменение вблизи горных выработок . . . . . 141
§ 2. Основные представления о механическом взаимодействии горных пород и насыщающих их жидкостей . . . . . 145
§ 3. Деформация горных пород в результате механического взаимодействия горных пород и насыщающих их жидкостей . . . . 152
§ 4. Механизм образования трещин в горных породах при гидравлическом разрыве пласта . . . . . 159

Стр.

Глава V. **Подземная термогидродинамика** . . . . . 170
§ 1. Основные понятия термодинамики . . . . . 170
§ 2. Уравнение сохранения энергии при подземном движении жидкостей и газов . . . . . 176
§ 3. Явления теплопроводности в горных породах . . . . . 182
§ 4. Вытеснение нефти из пластов горячей водой и паром . . . . 187
§ 5. Механизм извлечения нефти из недр при помощи внутрипластового горения . . . . . 193
§ 6. Сочетание внутрипластового горения с заводнением . . . . . 201

Список литературы . . . . . 208

*Юрий Петрович Желтов*

**МЕХАНИКА НЕФТЕГАЗОНОСНОГО ПЛАСТА**

Редактор издательства *Н. Д. Дубровина*. Технический редактор *Л. В. Дунаева*
Корректор *Н. А. Громова*

Сдано в набор 22/VII 1974 г. Подписано в печать 2/XII 1974 г. Т-19177.
Формат 60 × 90¹/₁₆. Бумага № 2. Печ. л. 13,5. Уч.-изд. л. 14,28. Тираж 2200 экз.
Заказ № 1132/4504—6. Цена 1 р. 59 к.

Издательство «Недра», 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд 1/19.
Ленинградская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
196006, г. Ленинград, Московский пр., 91.